BLOQUE 1 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 1.-
a) Discuta, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + y + z = a \\ y + az = 2 \end{cases}$$ **[1.5 puntos]**

b) Resuélvalo, si es posible, para el caso de **a = 1 [1 punto]**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 - a - a = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2}{2} = 1$$

$$\forall a \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$b)Si\ a = 1$$

$$y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z \Rightarrow x + 2 - z + z = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow Solución\ (-1\ , 2 - \lambda\ , \lambda)$$

CUESTIÓN 2.-
a) Defina el rango de una matriz **[0.5 puntos]**
b) Si **A** es una matriz y $a \in \Re$ ¿cuando se cumple que **rango(aA) = rango(A)?** Justifique la respuesta. **[0.5 puntos]**

c) Estudie, en función de los valores de a, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

[1.5 puntos]

a)
En álgebra lineal, el rango de una matriz es el número de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. Si el rango fila y el columna son iguales, este número es llamado simplemente **rango de A.** Comúnmente se expresa como **rang(A).**
El número de columnas independientes de una matriz *m* por *n* llamada *A* es igual a la dimensión del espacio columna de *A*. También la dimensión del espacio fila determina el rango. El rango de *A* será, por tanto, mayor o igual que uno y menor o igual que el mínimo entre *m* y *n*.

Continuación de la Cuestión 2 del Bloque 1

b) En todo los casos ya que **(aA) = a.(A)**, como el rango depende de la matriz de **A**

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2$$

BLOQUE 2 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 1.-
a) Determine el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos **P(2 , 0) y Q(1 , 1)** es igual a **2 [2 puntos]**
b) ¿Qué tipo de curva representa el lugar?

a)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=2-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow$$

$$(x-2)^2+y^2=4+(x-1)^2+(y-1)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow$$

$$x^2+4-4x+y^2-4-x^2-1+2x-y^2-1+2y=-4\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow$$

$$-2x+2y-2=4\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow x-y+1=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+1-2xy+2x-2y=4\left(x^2+1-2x+y^2+1-2y\right) \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+1-2xy+2x-2y=4x^2-8x+4y^2-8y+8 \Rightarrow 3x^2+3y^2-10x-6y+2xy+7=0$$

b) Es una elipse con focos en **P(2 , 0) y Q(1 , 1)**

CUESTIÓN 2.-

a) Encuentre la distancia del punto **P(1 , 1 , 1)** a la recta de ecuación $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

[2.5 puntos]

Una vez hallada la ecuación de la recta **r**, se hallará un plano π, perpendicular a ella, que contenga al punto **P**, utilizando el vector director de la recta y el vector formado por **P** y el punto genérico **G,** que al ser ambos perpendiculares su producto escalar es nulo y la ecuación del plano.
Posteriormente hallaremos el punto de corte, **Q ,** del plano hallado y la recta **r**, la distancia **PQ** (el modulo de ese vector) es la distancia pedida

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases} y=1-2x \Rightarrow x+1-2x-z=2 \Rightarrow z=-1-x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(1,-2,-1)$$

Continuación de la Cuestión 1 del Bloque 2

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1, -2, -1) \equiv (-1, 2, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1, 2, 1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow -(x-1) + 2(y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y - z + 2 = 0$$

Punto de corte Q

$$\lambda - 2 \cdot (1 - 2\lambda) - (-1 - \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda + 4\lambda + \lambda - 2 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$Q\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = 1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3} \\ z = -1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{6}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u$$

BLOQUE 3 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 1.- Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva: $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) Dominio de definición**. [0.25 puntos]**
b) Simetrías **[0.25 puntos]**
c) Cortes a los ejes **[0.25 puntos]**
d) Asíntotas**. [0.5 puntos]**
e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento **[0.5 puntos]**
f) Máximos y Mínimos **[0.25 puntos]**
g) Representación aproximada **[0.5 puntos]**

a)

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{(-2)^2 + 3}{(-2)^2 - 4} = \frac{4+3}{4-4} = \frac{7}{0} \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2 + 3}{2^2 - 4} = \frac{4+3}{4-4} = \frac{7}{0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Dom(f) = \forall x \in \Re - \{-2, 2\}$$

b)

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow \textit{Simétrica respecto al eje OY}$$

Continuación de la Cuestión 1 del Bloque 3

c)

$$\text{Corte con el eje}\begin{cases} OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2+3}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2+3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-3} \Rightarrow \text{No hay puntos de corte} \\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0^2+3}{0^2-4}=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow \left(0\ ,-\dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

d)Asíntotas verticales

$$\text{En } x=-2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{(-2)^2+3}{\left(-2^-\right)^2-4}=\dfrac{7}{0^+}=\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{(-2)^2+3}{\left(-2^+\right)^2-4}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

$$\text{En } x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{2^2+3}{\left(2^-\right)^2-4}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{2^2+3}{\left(2^+\right)^2-4}=\dfrac{7}{0^+}=\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal $y=1$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Asíntota horizontal $y=1$ *cuando* $x\to-\infty$

Asíntota oblicua o inclinada

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^3-4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{-x^3-4x}=\frac{\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{-1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{-1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0+0}{-1-0}=\frac{0}{-1}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

Continuación de la Cuestión 1 del Bloque 3

e)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-14x}{(x^2-4)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -14 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x > 0 \\ (x^2-4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

$-\infty$ **0** ∞

-14 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 - 4)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+) f'(x) > 0**	**(-) f'(x) < 0**

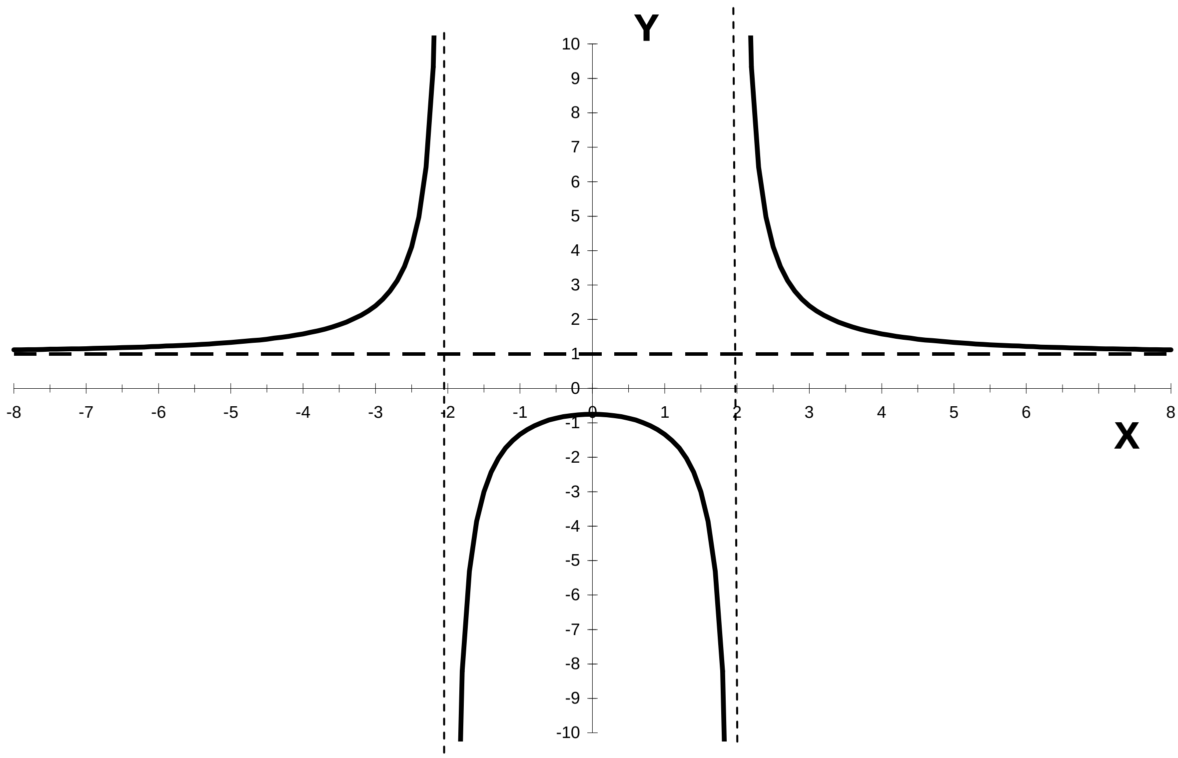
Creciente $\forall x \in \Re / (x < -2) \cup (-2 < x < 0)$

Decreciente $\forall x \in \Re / (0 < x < 2) \cup (x < 2)$

f)

En $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+3}{0^2-4} = -\frac{3}{4}$ **hay un Máximo relativo** (de creciente pasa a decreciente)

g)



CUESTIÓN 2.-
Calcule la dimensión de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesitan exactamente **1248** metros de valla para los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible **[2.5 puntos]**

Uno de los campos tiene de lado **l** siendo su perímetro **4l**
El de triple perímetro tendrá una longitud perimetral de **12l,** siendo su lado **3l**
El tercero tiene de lado **a** siendo su perímetro **4a**

$$\begin{cases} 4l + 12\cdot l + 4a = 1248 \Rightarrow l + 3\cdot l + a = 312 \Rightarrow a = 312 - 4l = 4\cdot(78 - l) \\ A = l^2 + (3l)^2 + a^2 = l^2 + 9l^2 + a^2 = 10l^2 + a^2 \end{cases} \Rightarrow A = 10l^2 + 4^2\cdot(78 - l)^2 \Rightarrow$$

$$A = 10l^2 + 16\cdot\left(78^2 - 156\cdot l + l^2\right) = 26l^2 - 2496\cdot l = 2\cdot\left(13l^2 - 1248\cdot l\right) \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dl} = 2\cdot(26l - 1248) = 4\cdot(13\cdot l - 624) \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 13\cdot l - 624 = 0 \Rightarrow 13\cdot l = 624 \Rightarrow l = \frac{624}{13} = 48 \Rightarrow$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dl^2} = 4.13 = 42 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} El\ primer\ cuadrado\ tendrá\ 48\ m.\ de\ lado \\ El\ segundo\ cuadrado\ tendrá\ 3.48 = 144\ m.\ de\ lado \\ El\ tercer\ cuadrado\ tendrá\ 4(78 - 48) = 120\ m.\ de\ lado \end{cases}$$

BLOQUE 4 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 1.-
Encuentre el área del recinto determinado por las curvas $y = |x - 2|$ $\quad y = -x^2 + 4x - 2$
[2.5 puntos]

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$y = |x - 2| = \begin{cases} -x + 2 & si \quad x < 2 \\ x - 2 & si \quad x \geq 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2 = -x^2 + 4x - 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 & si \quad x < 2 \\ x - 2 = -x^2 + 4x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 & si \quad x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+3}{2} = 4 \notin (-\infty\ , 2) \\ x = \frac{5-3}{2} = 1 \in (-\infty\ , 2) \end{cases} \\ x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x - 3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (2\ , \infty) \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in (2\ , \infty) \end{cases} \end{cases}$$

$$La\ int\,egral\ definida\ se\ calculará\ entre\ 1\ y\ 3 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 - 2 = 0 \\ g(2) = -2^2 + 4\cdot 2 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x)$$

$$A = \int_1^2 \left(-x^2 + 4x - 2\right)dx - \int_1^2 (-x + 2)\,dx + \int_2^3 \left(-x^2 + 4x - 2\right)dx - \int_1^2 (x - 2)\,dx$$

$$A = \int_1^2 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx + \int_2^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = -\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2 + 5\cdot\left[x^2\right]_1^2 - 4\cdot[x]_1^2 - \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_2^3 + 3\cdot\left[x^2\right]_2^3$$

$$A = -\frac{1}{3}\cdot\left(2^3 - 1^3\right) + 5\cdot\left(2^2 - 1^2\right) - 4\cdot(2 - 1) - \frac{1}{3}\cdot\left(3^3 - 2^3\right) + 3\cdot\left(3^2 - 2^2\right) = -\frac{7}{3} + 15 - 4 - \frac{5}{3} + 15 = 30\ u^2$$

CUESTIÓN 2.-

a) Si p y q son enteros positivos, demuestre que : $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \int_0^1 x^q(1-x)^p\,dx$

[1.5 puntos]

b) Calcule $\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx$ **[1 punto]**

$a)$

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \int_1^0 (1-t)^p t^q\,(-dt) = -\int_1^0 (1-t)^p t^q dt = \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$$

$$1-x=t \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow x = 1-t$$

$$\int_0^1 (1-t)^p t^q dt = \int_0^1 (1-x)^p x^q dx \Rightarrow \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \int_0^1 (1-x)^p x^q dx$$

$b)$

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx = \int_1^0 (1-t)^2\cdot t^{10}\cdot(-dt) = -\int_1^0 (1-t)^2\cdot t^{10}\cdot dt = -\int_1^0 \left(1-2t+t^2\right)\cdot t^{10}\cdot dt$$

$$1-x=t \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases} \Rightarrow -dx = dt \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow x = 1-t$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx = \int_0^1 \left(1-2t+t^2\right)\cdot t^{10}\cdot dt = \int_0^1 \left(t^{10}-2t^{11}+t^{12}\right)\cdot dt = \frac{1}{11}\cdot\left[t^{11}\right]_0^1 - \frac{2}{12}\cdot\left[t^{12}\right]_0^1 + \frac{1}{13}\cdot\left[t^{13}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx = \frac{1}{11}\cdot\left(1^{11}-0^{11}\right) - \frac{1}{6}\cdot\left(1^{12}-0^{12}\right) + \frac{1}{13}\cdot\left(1^{13}-0^{13}\right) = \frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13} = \frac{78-143+66}{858} = \frac{1}{858}$$