1. Soluciones del examen de Matemáticas del 200906

1. ***Comprueba si los siguientes conjuntos son o no subespacios vectoriales de*** $\mathbb{R}^3$.

   a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$

   b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + \alpha x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$

   c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) : 8x_1 + x_3 = 2, x_2 + x_3 = 0\}$

   Solución: Los conjuntos A y C no tiene estructura de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que el vector nulo de este espacio, a saber, $(0, 0, 0)$ no pertenece a ellos. En el caso del conjunto A se tiene $0^2 + 0^2 + 0^2 \neq 1$ y en el caso del conjunto C se verifica $8 \cdot 0 + 0 \neq 2$.

   Estudiemos, pues, si el conjunto B tiene estructura, o no, de espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, ya que el requisito de contener al vector nulo lo cumple.

   Consideremos dos vectores $\overrightarrow{u}(x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{v}(y_1, y_2, y_3)$ de B y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por ser $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in B$, se tiene como cierto que se cumplen las condiciones $x_1 + \alpha x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0$, así como $y_1 + \alpha y_3 = 0, y_2 + y_3 = 0$. Comprobemos ahora si la combinación lineal $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ es también un vector de B, lo que nos garantizaría la condición de B como subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   En efecto:

   $$\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

   cumpliéndose:

   $$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \alpha(\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(x_1 + \alpha x_3) + \mu(y_1 + \alpha y_3) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

   así como:

   $$\lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 = \lambda(x_2 + x_3) + \mu(y_2 + y_3) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

   □

2. ***Estudia si la matriz***

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Si lo es, calcula un matriz diagonal y otra de paso.

Solución: Empecemos calculando los autovalores de A, resolviendo su ecuación característica:

$$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

por tanto, los autovalores de A son:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 & m_2 = 1 \end{cases}$$

Todos los autovalores de A son reales. Analicemos ahora los subespacios de autovectores asociados a cada uno de estos autovalores. Empecemos por el autovalor de mayor multiplicidad:

Subespacio de autovectores asociado al autovalor $\lambda_1 = -2 : V(-2)$

a) Ecuaciones implícitas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} & & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & & = & 0 \end{cases}$$

b) Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 & = & -3\lambda \\ x_2 & = & \lambda \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

c) Base de $V(-2) : \{(-3, 1, 0)\}$

d) $dim(V(-2)) = 1$

Como $dim(V(\lambda_1)) \neq m_1$, se tiene que la matriz no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$

□

3. ***Expresa en forma binómica,*** $a+bi$***, el número complejo*** $\dfrac{1-e^{\frac{\pi i}{2}}}{1+e^{\frac{\pi i}{2}}}$

Solución: Si usamos la fórmula $e^{\alpha i} = cos(\alpha) + isen(\alpha)$, válida para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Por tanto:

$$\frac{1-e^{\frac{\pi i}{2}}}{1+e^{\frac{\pi i}{2}}} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-1-2i}{2} = -i$$

□

4. ***Calcula el polinomio*** $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ***cuyo valor y el de sus dos primeras derivadas coinciden en el punto*** $x = 0$ ***con los de*** $f(x) = e^{x+1}cos(x)$***.***

Solución: El polinomio pedido es el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$, es decir:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Ahora bien:

$$f'(x) = e^{x+1}cos(x) - e^{x+1}sen(x) = e^{x+1}[cos(x) - sen(x)]$$

$$f''(x) = e^{x+1}[cos(x) - sen(x)] - e^{x+1}[sen(x) + cos(x)] = -2e^{x+1}sen(x)$$

de donde se tiene: $f(0) = e, f'(0) = e, f''(0) = 0$ y por tanto el polinomio buscado es:

$$P(x) = e + ex$$

□

5. ***Calcula el límite*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 sen^2(x)}{e(1-cos(x))^2}$

Solución: Este límite presente la indeterminación $\frac{0}{0}$. Si hacemos uso de infinitésimos equivalentes, a saber:

$$sen(x) \overset{x\to 0}{\sim} x;\ (1-cos(x)) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

podemos expresar el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen^2(x)}{e(1-cos(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\dfrac{ex^4}{4}} = \frac{4}{e}$$

□

6. ***La forma de las líneas en espectroscopía de resonancia magnética se describen a menudo con la función de Lorentz***

$$g(w) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{T}{1+T^2(w-w_0)^2}$$

Calcula

$$\int_{w_0}^{+\infty} g(w)\ dw$$

Solución: Se trata de una integral impropia de 3ª especie ya que combina la dos impropiedades de 1ª especie (por ser el intervalo de integración no acotado) y de 2ª especie (por ser la función no acotada en un entorno del extremo inferior del intervalo de integración). Podemos separar estas dos impropiedades, tomando un punto $w_1 > w_0$ y escribiendo:

$$\int_{w_0}^{+\infty} g(w)\ dw = \int_{w_0}^{w_1} g(w)\ dw + \int_{w_1}^{+\infty} g(w)\ dw$$

Calculemos aparte una primitiva de la función de Lorentz:

$$\int \frac{1}{\pi}\cdot\frac{T}{1+T^2(w-w_0)^2}\ dw = \frac{1}{\pi}\int \frac{T}{1+(T(w-w_0))^2}\ dw = \frac{1}{\pi} arctg(T(w-w_0))$$

Por tanto:

$$\int_{w_0}^{+\infty} g(w)\,dw = \int_{w_0}^{w_1} g(w)\,dw + \int_{w_1}^{+\infty} g(w)\,dw = \frac{1}{\pi} arctg(T(w_1 - w_0)) +$$

$$+ \lim_{w \to +\infty} \frac{1}{\pi} arctg(T(w - w_0)) - \frac{1}{\pi} arctg(T(w_1 - w_0)) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

□

7. ***Calcula las derivadas parciales de la función compuesta*** $u = f(x, y, z)$***, donde*** $x = t, y = t^2, z = t^3$***.***

   Solución: Haciendo la composición:

   $$u(t) = f(t, t^2, t^3)$$

   Por tanto:

   $$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, t^2, t^3) + 2t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(t, t^2, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, t^2, t^3)$$

   Nota: En este ejercicio, también se podría hacer la composición en el otro orden, considerando la función

   $$v(x, y, z) = (f(x, y, z), f^2(x, y, z), f^3(x, y, z))$$

   Sin embargo, consideramos más natural la realización del ejercicio que hemos propuesto. □

8. ***Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie*** $f(x, y) = e^x(sen(y) + 1)$ ***en el punto*** $\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)$

   Solución: Comprobamos que el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)$ es un punto de la superficie $z = f(x, y)$ o bien $F(x, y, z) = 0$, si consideramos la función $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. En efecto, $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - 2 = 0$. Con esta última notación, se tiene que la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto considerado es:

   $$F_x\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)(x - 0) + F_y\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + F_z\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)(z - 2) = 0$$

Ahora bien:

$$F_x(x,y,z) = f_x(x,y,z) = e^x(sen(y)+1) \Rightarrow F_x\left(0,\frac{\pi}{2},2\right) = 2$$

$$F_y(x,y,z) = f_y(x,y,z) = e^x cos(y) \Rightarrow F_y\left(0,\frac{\pi}{2},2\right) = 0$$

$$F_z(x,y,z) = -1 \Rightarrow F_z\left(0,\frac{\pi}{2},2\right) = -1$$

Por tanto, el planto tangente solicitado es el de ecuación:

$$2x - z = -2$$

□

9. ***Calcula el área del círculo de radio** a**:*** $x^2 + y^2 < a^2$

Solución: Si expresamos y en función de x para calcular a través de integrales sólo el área de un cuadrante (v.g. el primer cuadrante) se tiene:

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Tomando la determinación positiva puesto que estamos considerando la semicircunferencia superior, y multiplicando por 4, el área total del círculo será:

$$A = 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{[1]}{=} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2cos^2(t)\,dt = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2t)}{2}\,dt =$$

$$= 4a^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{sen(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

como efectivamente corresponde al área de un círculo de radio a.

Nota: En [1], se ha hecho el cambio de variable $x = asen(t)$ que daría lugar a $dx = acos(t)\,dt$, así como a los correspondientes cambios en el intervalo de integración y en el integrando.

□

10. ***Dibuja la región cuya área viene dada por la integral***

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} dxdy$$

y cambia el orden de integración.

Solución: El recinto de integración viene descrito por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} -2 & \leq & y & \leq & 2 \\ 0 & \leq & x & \leq & 4-y^2 \end{cases}$$

El recinto correspondiente está determinado por la parábola horizontal $x = 4 - y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4-x}$ y el eje Y, tal como aparece en la figura.

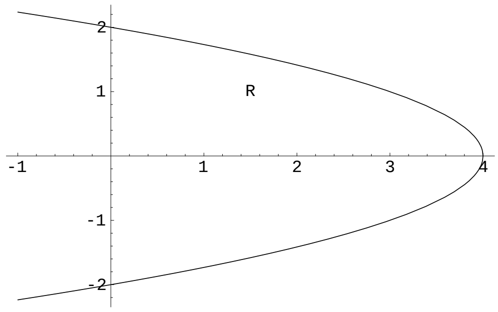

Figura 1: Recinto de integración

Describir el recinto en el otro orden de integración, supone observar primero el rango de variación de x y para cada x fija, observar el campo de variación de y. A través de la figura, se comprueba que el recinto de integración también puede ser descrito por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 0 & \leq & x & \leq & 4 \\ -\sqrt{4-x} & \leq & y & \leq & +\sqrt{4-x} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} dxdy = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-x}}^{+\sqrt{4-x}} dxdy$$

□