UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS **(LOGSE)**

Curso **2006-2007**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
Tiempo: Una hora y treinta minutos.
Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & az & = & 8 \end{array}\right.$$

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

(b) Resolver el sistema para $a = 4$.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

(a) Determinar las asíntotas de la función.

(b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

(a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500 euros, y por 100 metros de cable de tipo B, 1000 euros.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio máximo.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x+20) \quad , \quad h(x) = \frac{1}{2}(-5x+20)$$

y obtener su área.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40%, 35% y 25% de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5%, 3% y 4%, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar.

(a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

(b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

$$57,\ 49,\ 70,\ 40,\ 45,\ 44,\ 49,\ 32,\ 55,\ 45$$

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la duración media de las rosas.

RESOLUCIÓN DE LA OPCIÓN A.

Ejercicio 1.

a) Para discutir el sistema de ecuaciones, vamos a aplicar el teorema de Rouché:

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible, es necesario y suficiente que el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada coincidan.
En este caso, si los rangos coinciden con el número de incógnitas, el sistema tiene solución única. En caso contrario, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & a & 8\end{pmatrix}$$

$|A|=8a+14 \quad |A|=0 \Rightarrow a=-7/4$

Para

$$a\neq -7/4 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\circ} \quad incógnitas \Rightarrow S.C.D \Rightarrow 1 \quad solución$$

Para $a=7/4$

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg(A)=2; \quad \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 8\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg(A^*)=3$$

Por tanto:

$$a=7/4 \Rightarrow rg(A)\neq rg(A^*) \Rightarrow S.I. \Rightarrow no\ tiene\ solución$$

b) Resolviendo por el método de Gauss para a = 4:

$$\begin{cases} x-2y+z=0\\ 3x+2y-2z=3\\ 2x+2y+4z=8\end{cases} \quad \begin{matrix} E_1+E_2 \rightarrow 4x-z=3\\ E_1+E_3 \rightarrow 3x+5z=8\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1\\ y=1\\ z=1\end{matrix}$$

Ejercicio 2.

a) Nos piden estudiar las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$

a1) <u>Asíntotas verticales</u>.

Sabemos que puede haber asíntotas verticales en los puntos que no pertenecen al dominio de la función. Si en estos puntos la función tiende a ∞ o a -∞ entonces, tiene una asíntota vertical.

$dom(f)=\Re-\{-3\}\Rightarrow$ posible asíntota vertical: *x = -3*

Comprobamos: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\dfrac{36}{0}\Rightarrow x=-3$ es una asíntota vertical.

$$x=-3$$

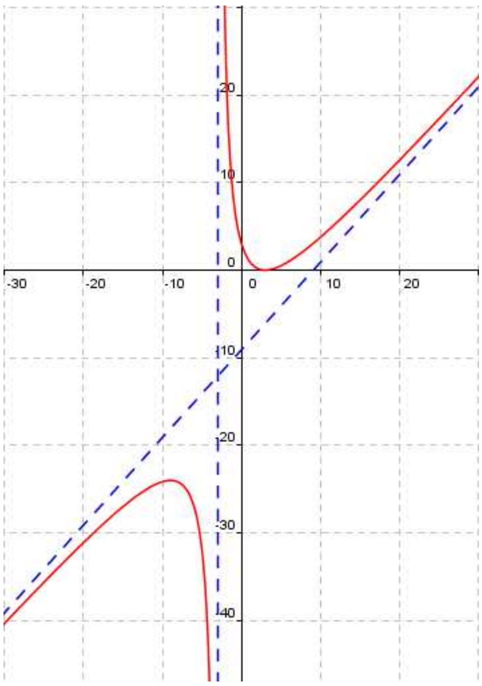
a2) <u>Asíntotas oblicuas</u>:

Dividimos el polinomio del numerador entre el denominador. El cociente, x – 9, es la ecuación de una recta oblicua, por lo que la función tiene una asíntota, la misma a la derecha que a la izquierda, por ser racional, que es la recta *y = x – 9.*

$$y=x-9$$

a3) <u>Asíntotas horizontales</u>: no tiene por tener oblicuas.

b) Sabemos que en los máximos y en los mínimos en los que la función sea derivable, la primera derivada se anula, y conocemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento por el signo de la derivada.



Por tanto, vamos a calcular la derivada y a estudiar su signo teniendo en cuenta los valores de la variable para los que se anula y el valor de la variable en el que no existe la función ya que en dicho punto la función no es derivable.

$$f'(x)=\frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2};\quad f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-9\\ x=3\end{cases}$$

x	(-∞,-9)	(-9,-3)	(-3,3)	(3,9)
f´(x)	+	-	-	+
f(x)	Crec	Decr	decr	crec

La función tiene un máximo relativo en M(-9, -24) y un mínimo relativo en m(3,0).

Ejercicio 3.

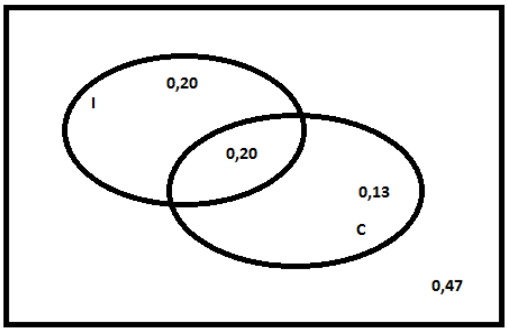
Podemos resolver el ejercicio basándonos en el álgebra de sucesos o con un diagrama de Venn.

Sean los sucesos: I = “El hogar elegido tiene contratado el acceso a internet”
C = “El hogar elegido tiene contratada la televisión por cable”

Entonces: $P(I)=0{,}40;\ P(C)=0{,}33;\ P(I\cap C)=0{,}20$

1. Si utilizamos el álgebra de sucesos:
   a) $P(C\cap\overline{I})=P(C)-P(C\cap I)=0{,}33-0{,}20=0{,}13$
   b) $P(\overline{C}\cap\overline{I})=P(\overline{C\cup I})=1-P(C\cup I)$
   $P(C\cup I)=P(C)+P(I)-P(C\cap I)=0{,}40+0{,}33-0{,}20=0{,}53$
   $P(\overline{C}\cap\overline{I})=1-0{,}53=0{,}47$

2. Utilizando el diagrama de Venn:



a) $P(C\cap\overline{I})=0{,}33-0{,}20=0{,}13$
b) $P(\overline{C}\cap\overline{I})=1-0{,}53=0{,}47$

Ejercicio 4.

a) Media: coincide con la de la población = μ. Media = 35 años.

Desviación típica = $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{5}{\sqrt{100}} = 0,5 \Rightarrow S = (0,5)^2 = 0,25$

b) Distribución de las medias muestrales: normal por serlo la población.

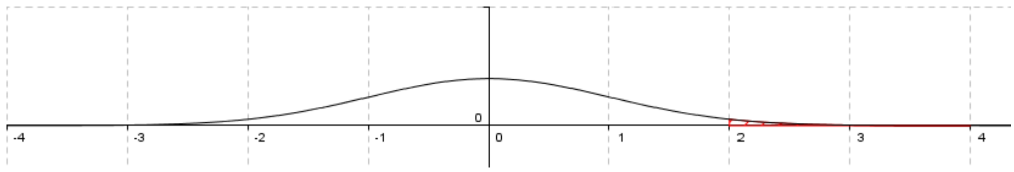
N(35, 0,5)

Empezamos tipificando la variable:

$\overline{X} = 36 \rightarrow Z = \dfrac{36-35}{0,5} = 2$

$\overline{X} = 37 \rightarrow Z = \dfrac{37-35}{0,5} = 4$

$P(36 < \overline{X} \leq 37) = P(2 < Z \leq 4) = 1 - 0,9772 = 0,0228$



RESOLUCIÓN DE LA OPCIÓN B.

Ejercicio 1.

Se trata de un ejercicio de programación lineal.
Los datos los tenemos por 100m.

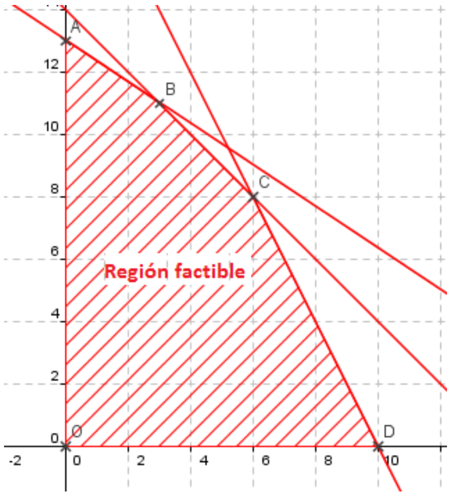
	Cu	Ti	Al	Bº
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Máx	195	20	14	

La función que queremos optimizar, función objetivo, es el beneficio, que debe ser máximo.

Función objetivo: $z(x,y)=1500x+1000y$

Restricciones:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 10x+15y\leq 195 \\ 2x+y\leq 20 \\ x+y\leq 14 \end{cases}$$



Coordenadas de los vértices:

Sabemos que la solución del problema coincide con las coordenadas de uno de los vértices.

O(0,0), A(0,13), B(3,11), C(6,8), D(10,0)

Valor de z en los vértices:

z(0.0) =0; z(0,13) = 13000; z(3.11) = 15500; **z(6,8) = 17000**; z(10,0) = 15000

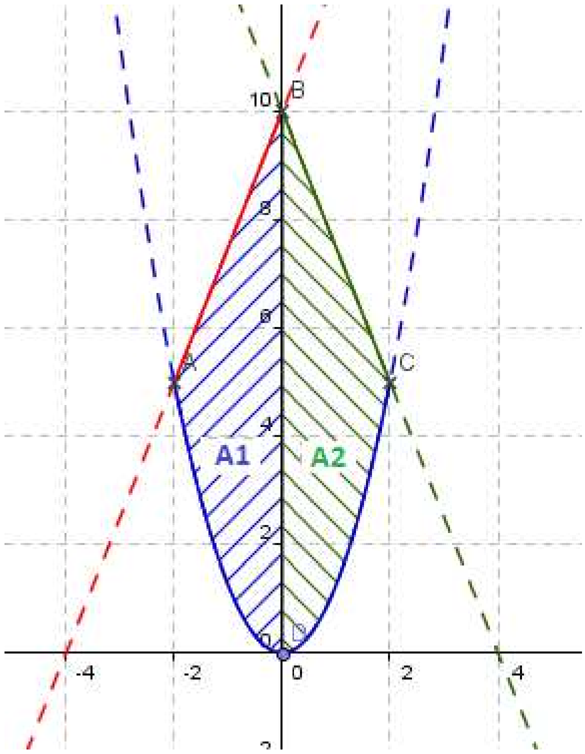
Solución:

Hay que fabricar 600m de cable tipo A y 800m de cable tipo B para obtener un beneficio de 17000€.

Ejercicio 2.

La gráfica de la función f(x) es una parábola con el vértice en el origen de coordenadas.

Las funciones g(x) y h(x) son lineales, por lo que su representación gráfica es una recta.

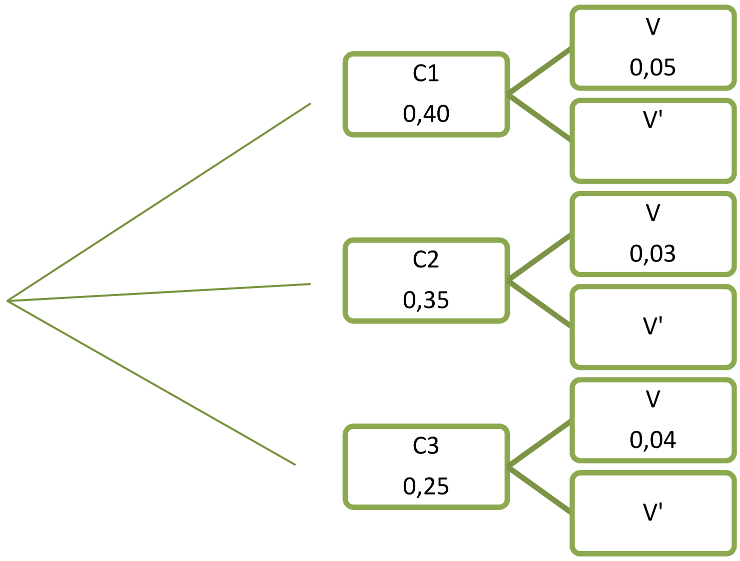


$$A1 = \int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))dx = 11,67u^2$$

$$A2 = \int_{0}^{2} (h(x) - f(x))dx = 11,67u^2$$

$$A = A1 + A2 = 23,34u^2$$

Ejercicio 3.



Sea V el suceso “el pianista es virtuoso”

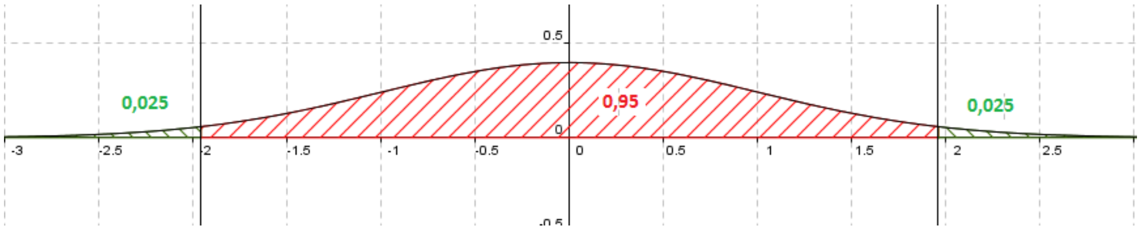
a) $P(V) = 0{,}40x0{,}05 + 0{,}35x0{,}03 + 0{,}25x0{,}04 = 0{,}0405$

b) $P(C1/V) = \dfrac{0{,}40x0{,}05}{0{,}0405} = 0{,}49$

Ejercicio 4.

Calculamos la media muestral, sumando los resultados obtenidos para la muestra y dividiendo entre 10. Media muestral = 48,6h

$$\bar{x} = 48{,}6$$
$$\sigma = 10$$
$$n = 10$$
$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0{,}025$$



$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 0{,}025 + 0{,}95 = 0{,}975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$I(95\%) = (48{,}6 - \frac{1{,}96 \cdot 10}{\sqrt{10}},\ 48{,}6 + \frac{1{,}96 \cdot 10}{\sqrt{10}}) = (42{,}4,\ 54{,}8)$$