MATHpines Prof. M.Díaz-Pinés	MATEMÁTICAS II (CNS y Tecnológico) **SELECTIVIDAD junio 2005** **Metodología de RESOLUCIÓN** **UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**

OPCIÓN A

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned}(m-1)\,x+y+z&=3\\ m\,x+(m-1)\,y+3\,z&=2\,m-1\\ x+2\,y+(m-2)\,z&=4\end{aligned}$$

a) (1,5 puntos) . Discutirlo según los distintos valores de m
b) (1,5 puntos) . Resolverlo cuando sea compatible indeterminado

Resolución

Desarrollo metodológico

I . Localización del problema

Álgebra Lineal

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas dependientes de un parámetro

Discusión de los casos en función del parámetro
Aplicación del Teorema de Rouché-Fröbenius
Aplicación de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan
Caso de SCI (sistema compatible indeterminado) : resolverlo

II. Datos y cuestiones

d) Datos

d1. Nos dan un sistema de 3 ecuaciones lineales dependientes del parámetro m

c) Cuestiones

c1. Discusión según los valores de m
c2. Resolución en el caso de S.C.I.

III. Análisis del problema

a1) Se trata de una familia de sistemas de ecuaciones lineales, que tiene un sistema para cada valor del parámetro

b1) Geométricamente, se trata de estudiar la posición relativa y sus posibles intersecciones de 3 familias de planos. Cada familia de planos viene dada por una ecuación en el parámetro m

IV. Planteamiento

p1) Partimos del método matricial como instrumento del estudio pedido
p2) Expresaremos matricialmente el sistema
p3) Obtendremos la matriz de los coeficientes A , la matriz ampliada $A1$ y la matriz columna B de los términos independientes
p4) Al ser A matriz cuadrada con $n=3$, hallaremos los valores críticos de m que anulan $\mathrm{Det}(A)$
p5) Los valores críticos nos dan los diferentes casos

p6) Aplicamos el método de Gauss y el de GaussJordan para estudiar esos casos, obteniendo, por ejemplo, los rangos que nos interesen
Uno de los casos, o más, serán S.C.I. y determinaremos su " grado de libertad ": el grado

de multiplicidad paramétrica de m , el orden ∞^k que hemos obtenido

p7) Comprobamos los resultados obtenidos aplicando métodos alternativos (ordinarios o automáticos)

V. Ampliación **(No se pide)**

a 1) Estudio de la solución general compatible determinada
Solución para algún caso particular

a2) Estudio del problema geométrico de las posiciones de los planos en función de m
Estudiar cómo influye m en la posición de cada plano
Eventualmente, se podría hacer alguna representación espacial

a3) Posiciones de los planos en los dos casos en que el sistema es incompatible

$$(m-1)\,x+y+z=3$$
$$m\,x+(m-1)\,y+3\,z=2\,m-1$$
$$x+2\,y+(m-2)\,z=4$$

$$S := [(m-1)\,x+y+z=3,\ m\,x+(m-1)\,y+3\,z=2\,m-1,\ x+2\,y+(m-2)\,z=4]$$

$$A1=\begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1 & 3\\ m & m-1 & 3 & 2\,m-1\\ 1 & 2 & m-2 & 4\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1\\ m & m-1 & 3\\ 1 & 2 & m-2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3\\ 2\,m-1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A)=m^3-5\,m^2+2\,m+8$$

Por Ruffini podemos investigar entre los divisores de 8
$m=1$ no es raíz pues la suma de los coeficientes no es nula
Veamos si $m=-1$ lo es. Si cambiamos el signo de los coeficientes de grado impar suman cero
Por tanto, es raíz $m=-1$

$$\frac{m^3-5\,m^2+2\,m+8}{m+1}=m^2-6\,m+8$$
$$m^2-6\,m+8=(m-2)\,(m-4)$$
$$m^3-5\,m^2+2\,m+8=(m-2)\,(m-4)\,(m+1)$$

Valores críticos del parámetro

$$m_1 := -1$$
$$m_2 := 2$$
$$m_3 := 4$$

<u>Casos</u>

Vamos a llamar $M1$ y M a las matrices ampliada y de los coeficientes de cada caso

1º) $m\neq -1,\ m\neq 2,\ m\neq 4$

Aquí tenemos el caso de S.C.D. (sistema compatible determinado)
Por Rouché-Fröbenius :
$\mathrm{Det}(M)\neq 0$ => $\mathrm{rg}(M1)=3$, $\mathrm{rg}(M)=3$, existe $M^{(-1)}$ para todo m distinto de los valores críticos
=> $r=3$, $n-r=0$ => S.C.D.
Después hallaremos la " solución general compatible determinada " y algún caso particular, como ampliación, pues no se pide expresamente

2º) $m=-1$

$$M1=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss

$$\mathrm{G}(M1)=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -5 & 5 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A la vista de la última fila => S.I. (sistema incompatible)

$$\mathrm{rg}(M1)=3,\ \mathrm{rg}(M)=2$$
$$\mathrm{rg}(M1)\neq \mathrm{rg}(M)$$

S.I., sistema incompatible

3º) $m = 2$

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G}(M1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

También sistema incompatible (S.I.)

Por Rouché-Fröbenius :

$$\mathrm{rg}(M1) = 3, \mathrm{r4g}(M) = 2$$

$$\mathrm{rg}(M1) \neq \mathrm{rg}(M)$$

4º) $m = 4$

$$M1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G}(M1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya vemos que ahora el rango del sistema es 2

Por Rouché-Fröbenius :

$$\mathrm{rg}(M1) = 2, \mathrm{rg}(M) = 2$$

$$r = 2$$

$$n - r = 1$$

Sistema Compatible Indeterminado 1-paramétrico

Elegimos $z = \lambda$ como " variable paramétrica "

$$\left\{ z = \lambda, y = \frac{9 - 5\,\lambda}{5}, x = \frac{3 - \lambda - \left(\frac{9}{5} - \lambda\right)}{3} \right\}$$

$$z = \lambda, y = \frac{9}{5} - \lambda, x = \frac{2}{5}$$

$$\left[x = \frac{2}{5}, y = \frac{9}{5} - \lambda, z = \lambda \right]$$

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{9}{5} - \lambda, \lambda \right]$$

Si aplicamos Gauss-Jordan :

$$\mathrm{GJ}(M1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos los mismos resultados

Podemos expresarlos también así

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es la recta de soluciones : determinada por el punto ($\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 0$) y el vector de dirección ($0, -1, 1$)

Su forma continua es :

$$\frac{x-\frac{2}{5}}{0} = \frac{y-\frac{9}{5}}{-1} = \frac{z}{1} \ (=\lambda)$$

V. *Ampliación* (No se pide)

a 1) Estudio de la solución general compatible determinada
Solución para algún caso particular

a2) Estudio del problema geométrico de las posiciones de los planos en función de m
Estudiar cómo influye m en la posición de cada plano
Eventualmente, se podría hacer alguna representación espacial

a 1)

Caso 1º) $m \neq -1, m \neq 2, m \neq 4$

$$\mathrm{GJ}(A1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{m}{(m-2)(m+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2m^2-2m-5}{(m-2)(m+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(m-2)(m+1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{(m-2)(m+1)} \\ \frac{2m^2-2m-5}{(m-2)(m+1)} \\ -\frac{1}{(m-2)(m+1)} \end{bmatrix}$$

Solución general compatible determinada

Caso particular : Resolverlo para $m = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a2)

Plano π_1 , de ecuación :

$$(m-1)x + y + z = 3$$

$$\frac{x}{\left[\frac{3}{m-1}\right]} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 1$$

Corta al eje OY en el punto ($0, 3, 0$) y a OZ en el ($0, 0, 3$) , que forman el eje de un haz de planos

Al eje OX lo corta en un punto variable ($\frac{3}{m-1}, 0, 0$)

Plano π_2 , de ecuación :

$$m\,x + (m-1)\,y + 3\,z = 2\,m - 1$$

$$\frac{x}{\left[\frac{2m-1}{m}\right]} + \frac{y}{\left[\frac{2m-1}{m-1}\right]} + \frac{z}{\left[\frac{2}{3}m - \frac{1}{3}\right]} = 1$$

No corta a ningún eje en un punto fijo : los tres son variables

Plano π_3 , de ecuación :

$$x + 2\,y + (m-2)\,z = 4$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{z}{\left[\frac{4}{m-2}\right]} = 1$$

Es otro haz de planos , de eje determinado por los puntos fijos ($4, 0, 0$) y ($0, 2, 0$) de OX y OY , respectivamente. Al eje OZ lo corta en un punto variable : $\left(0, 0, \frac{4}{m-2}\right)$

a3)   Posiciones de los planos en los dos casos en que el sistema es incompatible

Ejemplo : Caso 2º)

$$M1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ya se observa que los planos 2º y 3º son paralelos

Plano 1º)

$$-2\,x + y + z = 3$$

Ecuación explícita $z = \mathrm{f}(x, y)$

$$z = 2\,x - y + 3$$

Ecuación paramétrica : $[x = u, y = v, z = \mathrm{f}(u, v)]$

$$p1 := [u, v, 2\,u - v + 3]$$

Análogamente :

Plano 2º)

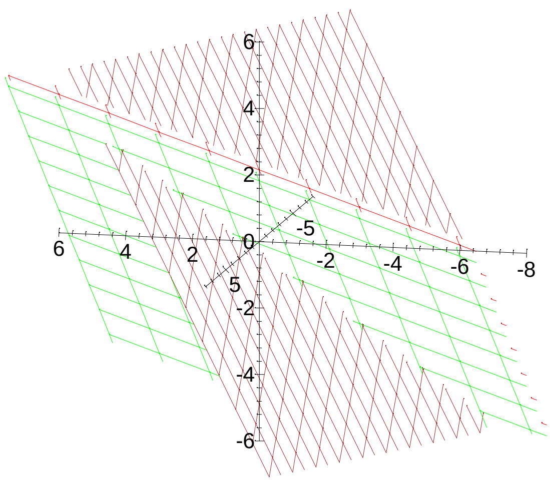
$$-x - 2\,y + 3\,z = -3$$

Plano 3º)

$$x + 2\,y - 3\,z = 4$$

$$z = \frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y - \frac{4}{3}$$

$$p3 := \left[3\,u, 3\,v, u + 2\,v - \frac{4}{3}\right]$$



Dos planos paralelos cortados por un tercero