MATHpines Prof. M.Díaz-Pinés	MATEMÁTICAS II (CNS y Tecnológico)
	SELECTIVIDAD junio 2005 **Metodología de RESOLUCIÓN**
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

1. (2 puntos). a) (1 punto) . Resolver el sistema de ecuaciones

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y - z = 2$$

b) (1 punto) . Hallar las constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación :

$$5x + y + \alpha z = \beta$$

el sistema resultante sea compatible indeterminado

Desarrollo metodológico

I . Localización del problema

Álgebra Lineal

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas compatibles indeterminados

Ecuación dependiente de dos parámetros

Recta de soluciones

Conservación del rango

Geometría del espacio

Ecuaciones de planos

Haz de planos

II. Datos y cuestiones

d) Datos

d1. Nos dan un sistema de 2 ecuaciones lineales en tres indeterminadas x, y, z

d2. Nos dan una tercera ecuación que depende de dos parámetros α y β

c) Cuestiones

c1. Resolver el sistema inicial

c2. Hallar α y β para que el nuevo sistema formado por las tres ecuaciones siga siendo S.C.I.

III. Análisis del problema

a1) Se trata de 2 ecuaciones lineales en x, y, z que forman un S.C.I. ,además de porque lo dice el enunciado , porque son ecuaciones no proporcionales : linealmente independientes, ambas son significativas. Corresponden a dos planos secantes

a2) Se trata de hallar la recta de soluciones del primer sistema

a3) La tercera ecuación debe ser l.d. de las dos primeras : el rango del sistema debe seguir siendo 2

a4) La ecuación tercera debe corresponder a otro plano del haz de eje la recta hallada

IV. Planteamiento

p1) Resolvemos el sistema inicial por Gauss y Gauss-Jordan

p2)

Método 1º) Formamos la matriz ampliada del nuevo sistema y obligamos a que tenga rango 2

Método 2º) Formamos la ecuación del haz y obligamos a que el tercer plano pertenezca :

Deducimos los valores de α y β

V. *Ampliación* **(No se pide)**

a 1) Estudio del haz de planos
a2) Estudio del problema geométrico de las posiciones de los planos en un mismo haz
a3) Representación gráfica espacial

Resolución

$$ec1 := x + 2y + 3z = 1$$

$$ec2 := 2x + y - z = 2$$

Los vectores ortogonales de ambos planos son :

$$w1 := [1, 2, 3]$$

$$w2 := [2, 1, -1]$$

$$[1, 2, 3] \neq k\,[2, 1, -1]$$

Son l.i. (linealmente independientes) => Los planos π_1 y π_2 de ecuaciones ec.1 y ec.2 son secantes
Su intersección es una recta que es la recta de soluciones del S.C.I. que constituyen

Estudio matricial

$$S1 := [x + 2y + 3z = 1, 2x + y - z = 2]$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(A1) = 2, \mathrm{rg}(A) = 2$$

$$r = 2, n - r = 1$$

Aplicamos el T. de Rouché-Fröbenius :

$$S.C.I. 1 - paramétrico$$

$$\mathrm{G}(A1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{z = \lambda, y = -\frac{7\lambda}{3}, x = 1 - 3\lambda - 2\left(-\frac{7\lambda}{3}\right)\}$$

En función del parámetro λ

$$\{z = \lambda, y = -\frac{7}{3}\lambda, x = 1 + \frac{5}{3}\lambda\}$$

Cambiamos al parámetro μ

$$[x = 1 + 5\mu, y = -7\mu, z = 3\mu]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Recta que pasa por $\mathrm{A}(1, -7, 0)$ con vector de dirección $\mathrm{v}(5, -7, 3)$

b) Método 1º)

$$ec3 := 5x + y + \alpha z = \beta$$

$$S := [x + 2y + 3z = 1, 2x + y - z = 2, 5x + y + \alpha z = \beta]$$

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss :

$$G(M1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -7 & 0\\ 0 & 0 & \alpha+6 & \beta-5\end{bmatrix}$$

Para conservar el rango 2 =>

$$\alpha=-6,\ \beta=5$$

$$eq3 := 5\,x+y-6\,z=5$$

$$N1 := \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & -6 & 5\end{bmatrix}$$

$$G(N1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Obtenemos el mismo resultado que al comienzo

$$GJ(N1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-5}{3} & 1\\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[x=1+\frac{5}{3}\lambda,\ y=-\frac{7}{3}\lambda,\ z=\lambda\right]$$

Método 2º)

Ecuación del haz de planos determinado por π_1 y π_2 :

$$\pi_1+\tau\,\pi_2=0$$

Para cada valor del parámetro τ tenemos un plano del haz. Todos contienen a la recta solución que es el eje o arista del haz

$$x+2\,y+3\,z=1$$

$$x+2\,y+3\,z-1$$

$$\pi_1 := x+2\,y+3\,z-1$$

$$2\,x+y-z=2$$

$$2\,x+y-z-2$$

$$\pi_2 := 2\,x+y-z-2$$

$$\pi(\tau)=x+2\,y+3\,z-1+\tau\,(2\,x+y-z-2)$$

$$x+2\,y+3\,z-1+2\,\tau\,x+\tau\,y-\tau\,z-2\,\tau$$

$$(1+2\,\tau)\,x+(2+\tau)\,y+(3-\tau)\,z-1-2\,\tau=0$$

El tercer plano dado es :

$$5\,x+y+\alpha\,z-\beta$$

Ahora sólo queda establecer la proporcionalidad de los coeficientes homólogos

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\tau=2+\tau$$

$$\tau=-3$$

$$\frac{3-\tau}{\alpha}=2+\tau$$

$$\alpha=-\frac{-3+\tau}{2+\tau}$$

$$\alpha=-6$$

$$\frac{1+2\tau}{\beta}=2+\tau$$

$$\beta=\frac{1+2\tau}{2+\tau}$$

$$\beta=5$$

$$\alpha=-6\ ,\ \beta=5$$

c.q.c.

<u>Gráficas</u>

$$x+2y+3z=1$$

$$z=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}$$

$$2x+y-z=2$$

$$z=2x+y-2$$

$$5x+y-6z=5$$

$$z=\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}y-\frac{5}{6}$$