MATHpines Prof. M.Díaz-Pinés	MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS.
	SELECTIVIDAD junio 2005 Metodología de RESOLUCIÓN
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

1. (Puntuación máxima : 3 puntos)

Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿ Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje ? Obtener dicho mínimo.

Resolución

Localización del Problema
Se trata de un problema de *Programación Lineal* en que hay que minimizar la función objetivo , y nos dan unas restricciones que condicionan las variables

P) PLANTEAMIENTO

p0) Se determina cuál es el conjunto numérico en que se opera ($N, Z, Q, \Re$) , a la vista de la naturaleza de los entes u objetos que represente la función. Si la función objetivo la dan, como aquí, directamente en forma matemática se supone que operamos en $\Re$, cuerpo de los números reales

P1) Método gráfico

p1) Se representan las rectas fronteras de las restricciones
p2) Se estudia qué semiplano es el factible en cada caso
p3) Se halla el polígono factible y se determinan sus puntos
p4) Se determinan los vértices cuyas coordenadas sean números del conjunto numérico en que operamos
p5) Se calcula el vector *gradiente* o "de avance" de la función :
Si es $\mathrm{f}(x, y) = a\,x + b\,y$ dicho vector es $w = [\,a, b\,]$
p6) Las rectas equigananciales o de nivel serán perpendiculares a ese vector. Son de la forma $a\,x + b\,y = k$
Si queremos determinar la que pasa por el punto (x_0, y_0) => $k = a\,x_0 + b\,y_0$
p7) Si trasladamos paralelamente a sí misma una de esas rectas, avnzando en la dirección de $w = [\,a, b\,]$ habrá un primer vértice (o un lado completo del polígono) de contacto V_1 y uno final de salida V_2 , que los determinamos gráficamente
p8) Si es $V_1(x_1, y_1)$ => $\mathrm{f}(x_1, y_1)$ es el mínimo valor de la función objetivo que coincidirá con el valor k_1 de la recta de nivel que pasa por él.
El vértice $V_2(x_2, y_2)$ nos da el máximo de la función $\mathrm{f}(x_2, y_2) = k_2$ y V_2 está en la recta $a\,x + b\,y = k_2$
*p9) En algún caso, puede que V_1 ó V_2 no sean "vértices" porque los vértices no sean puntos factibles, por no tener coordenadas del conjunto numérico en que operamos. Por ejemplo, si dos rectas fronteras se cortan en un punto $\mathrm{V}\left(0, \frac{5}{3}\right)$ que parece que puede corresponder al máximo, y operamos con $x, y,$ naturales. Habría que ver qué punto de la cuadrícula natural N x N es el último por el que pasa una

recta de nivel $a\,x+b\,y=k$ .A lo mejor resulta que , p.ej., es el punto $\mathrm{M}(1, 2)$

P2) Método numérico

(Este método debe usarse tan sólo como comprobación numérica del gráfico)

Hallados los vértices del polígono factible, se hace un cuadro de doble entrada o matriz :

Vértice	x	y	$a\,x+b\,y$
A	x_A	y_A	$a\,x_A+b\,y_A=k_A$
B	x_B	y_B	$a\,x_B+b\,y_B=k_B$
....	....	....	....

El mayor de los valores k_V será el máximo del afunción objetivo f , y que se producirá para $x=x_V$, y el menor será el mínimo de la función objetivo

RD) Resolución Directa

P1) Designamos por x el número de envases pequeños

P2) Designamos por y el número de envases grandes

Las restricciones son :

$$100 \le x$$
$$200 \le y$$
$$x+y \le 1000$$
$$x \le y$$

Las restricciones dan como fronteras las rectas : $x=100$, $y=200$, $y=1000-x$, $y=x$

Podemos tomar escala 1 : 100

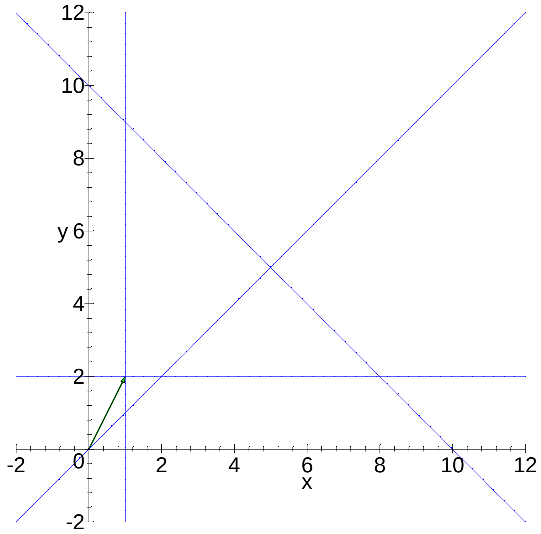
$$x=1 \ , \ y=2 \ , \ y=1-x \ , \ y=x$$

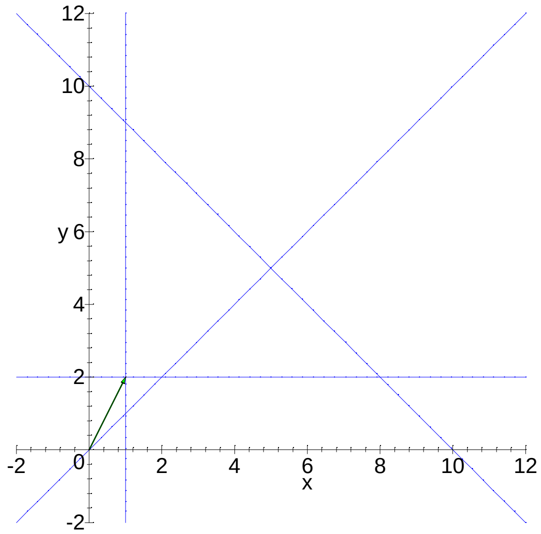
La función objetivo es $\mathrm{f}(x, y)$ = 0.10 x + 0.20 y (en euros)

Si operamos en "décimos de euro " aplicamos la escala 1 : 10

$$\mathrm{f}(x, y)=x+2\,y$$

El vector gradiente es $w=[1, 2]$

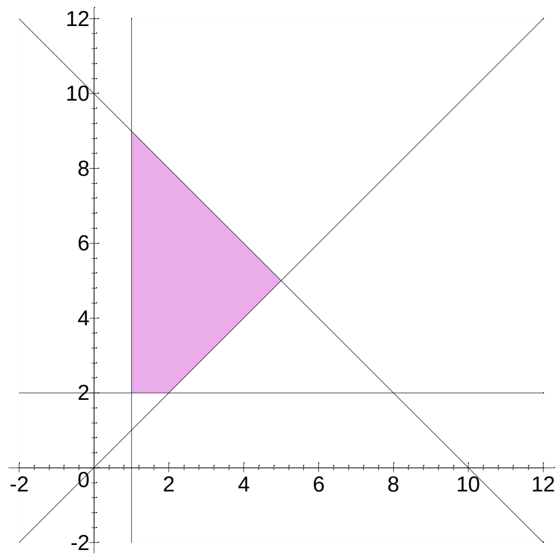


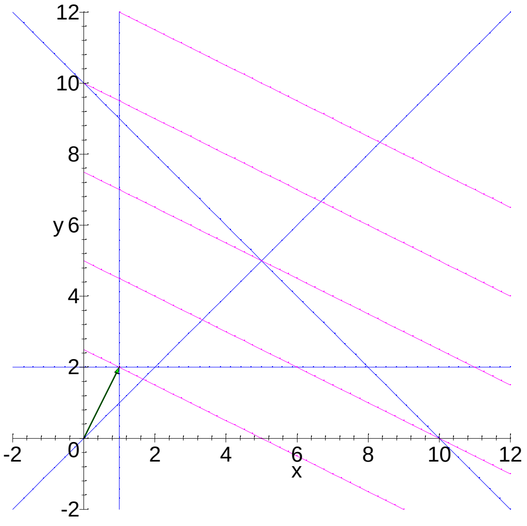


Región factible

Restricciones : $r_1 := 1 \le x; r_2 := 2 \le y; r_3 := x + y \le 10; r_4 := x \le y; r_5 := 0 \le x; r_6 := 0 \le y$
Tomamos

$$r_1 := 1 \le x$$
$$r_2 := 2 \le y$$
$$r_3 := x + y \le 10$$
$$r_4 := x \le y$$
$$r_5 := 0 \le x$$
$$r_6 := 0 \le y$$





Las rectas equiganaciales, o de nivel , representadas , son :

$$\{10-\frac{1}{2}x, \frac{25}{2}-\frac{1}{2}x, 5-\frac{1}{2}x, \frac{15}{2}-\frac{1}{2}x, \frac{5}{2}-\frac{1}{2}x, 15-\frac{1}{2}x\}$$

correspondientes a $x+2y=k$ para valores de k

<u>Puntos del polígono optimales</u>

Fronteras :

$$e_1 := x=1$$
$$e_2 := y=2$$
$$e_3 := x+y=10$$
$$e_4 := y-x=0$$

Puntos :

$$\{x=1, y=2\}$$

$$\{y=9, x=1\}$$

$$\{y=5, x=5\}$$

$$\{y=2, x=2\}$$

$$\mathrm{A}(1, 2), \mathrm{B}(9, 1), \mathrm{C}(5, 5), \mathrm{d}(2, 2)$$

El punto de salida de las rectas equiganaciales es el $\mathrm{C}(240, 360)$ que corresponderá al Mínimo
<u>Estudio de la función objetivo</u>

$$\mathrm{f}(x, y) = x+2y$$

$$\mathrm{f}(1, 2)=5, \mathrm{f}(9, 1)=11, \mathrm{f}(5, 5)=15, \mathrm{f}(2, 2)=6$$

Comprobación
Método P2)
Numérico o analítico

$$\begin{bmatrix} Punto & x & y & x+2\,y & extremo \\ A & 1 & 2 & 5 & min \\ B & 9 & 1 & 11 & no \\ C & 5 & 5 & 15 & max \\ D & 2 & 2 & 6 & no \end{bmatrix}$$

Recuperamos las escalas de simplificación :
El número de envases hay que multiplicarlo por 100
El coste del transporte hay que multiplicar por 10 para tener el importe en euros

Resultado

Mínimo $x = 100$ envases pequeños e $y = 200$ envases grandes

Coste mínimo : 50 euros