MATHpines	**MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS.**
Prof. M.Díaz-Pinés	**SELECTIVIDAD junio 2005** **Metodología de RESOLUCIÓN**
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN A

1. (Puntuación máxima : 3 puntos)

Se considera elsiguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ky - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

Se pide :

(a) Discutir el sistema para los distintos valores de k

(b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible

Resolución

Desarrollo metodológico

I . Localización del problema

Álgebra Lineal

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas homogéneos

Sistemas dependientes de un parámetro

Discusión de los casos en función del parámetro

Aplicación del Teorema de Rouché-Fröbenius

Aplicación de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan

Caso de SCI (sistema compatible indeterminado) : resolverlo

II. Datos y cuestiones

d) Datos

d1. Nos dan un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales dependientes del parámetro k

c) Cuestiones

c1. Discusión según los valores de k

c2. Resolución en el caso de S.C.I.

III. Análisis del problema

a1) Se trata de una familia de sistemas de ecuaciones lineales, que tiene un sistema (homogéneo) para cada valor del parámetro k

b1) Geométricamente, se trata de estudiar la posición relativa y sus posibles intersecciones de 3 familias de planos vectoriales, que pasan por el origen.

Cada familia de planos viene dada por una ecuación en el parámetro k

IV. Planteamiento

p1) Partimos del método matricial como instrumento del estudio pedido

p2) Expresaremos matricialmente el sistema

p3) Obtendremos la matriz de los coeficientes A , la matriz ampliada $A1$ y la matriz columna B de los términos independientes

p4) Al ser A matriz cuadrada con $n = 3$, hallaremos los valores críticos de k que anulan $\mathrm{Det}(A)$

p5) Los valores críticos nos dan los diferentes casos

Para los propios valores críticos tenemos la solución trivial nula : $[x=0, y=0, z=0]$
Para los valores de k no críticos tenemos S.C.I. que pueden ser 1 ó 2 -paramétricos
y que serán una recta vectorial (∞ soluciones) o planos vectoriales (∞^2 soluciones), respectivamente

p6) Aplicamos el método de Gauss y el de GaussJordan para estudiar esos casos, obteniendo, por ejemplo, los rangos que nos interesen
Uno de los casos, o más, serán S.C.I. y determinaremos su " grado de libertad ": el grado de multiplicidad paramétrica de k , el orden ∞^k que hemos obtenido

p7) Comprobamos los resultados obtenidos aplicando métodos alternativos (ordinarios o automáticos)

V. Ampliación **(No se pide)**

a1) Estudio del problema geométrico de las posiciones de los planos en función de m
Estudiar cómo influye m en la posición de cada plano
Eventualmente, se podría hacer alguna representación espacial
a2) Posiciones de los planos
a3) Gráficas espaciales

$$2x-3y+z=0$$
$$x-ky-3z=0$$
$$5x+2y-z=0$$

Sólo la segunda ecuación depende del parámetro
Tenemos , pues , los planos vectoriales concretos π_1 y π_3 y una familia $\pi_2(k)$ de planos vectoriales, dependientes del parámetro k , representada por la segunda ecuación
Por tanto, los planos fijos dan una recta intersección fija, que será cortada por la familia de planos.
Según de qué plano de la familia se trate podrá haber un punto de intersección, toda la recta común o no habrá ningún punto común

<u>Estudio matricial</u>

$$S := [2x-3y+z=0, x-ky-3z=0, 5x+2y-z=0]$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que en el caso de sistemas homogéneos $\mathrm{rg}(A1) = \mathrm{rg}(A)$ pues la columna nula de los términos independientes no modifica el rango
<u>Valores críticos</u> del parámetro k : valores anulan $\mathrm{Det}(A)$

$$\mathrm{Det}(A) = 7k+56$$
$$7k+56=0$$
$$k=-8$$

Casos :
1º) $k=-8$: soluciones distintas de la trivial $[x=0, y=0, z=0]$
2º) $k \neq -8$: solución trivial $[x=0, y=0, z=0]$
Caso 1º)

$$M := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss

$$\mathrm{G}(M) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya vemos que $\mathrm{rg}(M)=2$ al tener una fila nula

$$\mathrm{rg}(M)=2$$

Por tanto ,
$r=2$, $n-r=3-2=1$: grado de libertad : 1 =>
S.C.I. (sistema compatible indeterminado) 1-paramétrico
Aplicando Gauss, tenemos :

$$z=z,\ y=\frac{7\,z}{19}\ ,\ x=\frac{z+3\,y}{2}=\frac{-z+\dfrac{21\,z}{19}}{2}=\frac{z}{19}$$

$$\left[x=\frac{\lambda}{19},\ y=\frac{7\,\lambda}{19},\ z=\lambda\right]$$

Es la recta vectorial

$$\frac{x}{\left[\dfrac{1}{19}\right]}=\frac{y}{\left[\dfrac{7}{19}\right]}=\frac{z}{1}\quad\sim\quad\frac{x}{1}=\frac{y}{7}=\frac{z}{19}$$

Recta que pasa por el origen $\mathrm{O}(0,0,0)$ con vector de dirección $\mathrm{v}(1,7,19)$

Caso 2º) $k\neq-8$

En este caso, existe matriz inversa

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -k & -3\\ 5 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{inv}(A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\frac{k+6}{k+8} & -\frac{1}{7}\frac{1}{k+8} & \frac{1}{7}\frac{9+k}{k+8}\\ -\frac{2}{k+8} & -\frac{1}{k+8} & \frac{1}{k+8}\\ \frac{1}{7}\frac{5\,k+2}{k+8} & -\frac{19}{7}\frac{1}{k+8} & -\frac{1}{7}\frac{2\,k-3}{k+8}\end{bmatrix}$$

que existe para $k\neq-8$

Pero en este caso la solución es única, la trivial

Algunos , por la unicidad de la solución , dicen que es S.C.D., lo que no es del todo correcto.

Sería S.C.D., en el caso dependiente de 1 parámetro, cuando fuese tal para un conjunto de valores del parámetro.

Los más rigurosos llegan más lejos : cuando un sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial se dice que " no tiene solución "

Todo sistema homogéneo tiene la solución trivial : toda ecuación $a\,x+b\,y+c\,z=0$ admite la solución trivial.

Si aplicasemos Cramer, que podemos

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -k & -3\\ 5 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\frac{k+6}{k+8} & -\frac{1}{7}\frac{1}{k+8} & \frac{1}{7}\frac{9+k}{k+8}\\ -\frac{2}{k+8} & -\frac{1}{k+8} & \frac{1}{k+8}\\ \frac{1}{7}\frac{5\,k+2}{k+8} & -\frac{19}{7}\frac{1}{k+8} & -\frac{1}{7}\frac{2\,k-3}{k+8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Ampliación

Los planos π_1 y π_3 son fijos

$$\pi_1:=2\,x-3\,y+z=0$$

$$z=-2\,x+3\,y$$

Pasa por el origen $\mathrm{O}(0,0,0)$ con vector ortogonal $w_1=(2,-3,1)$

$$\pi_3:=5\,x+2\,y-z=0$$

$$z=5\,x+2\,y$$

Pasa por el origen $\mathrm{O}(0,0,0)$ con vector ortogonal $w_3=(5,2,-1)$

Su intersección es la recta vectorial r que pasa por $O(0, 0, 0)$ y vector de dirección $v_r = w_1 \times w_3$

$$w_1 := [2, -3, 1]$$

$$w_3 := [5, 2, -1]$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$i + 7j + 19k$$

$$v_r := [1, 7, 19]$$

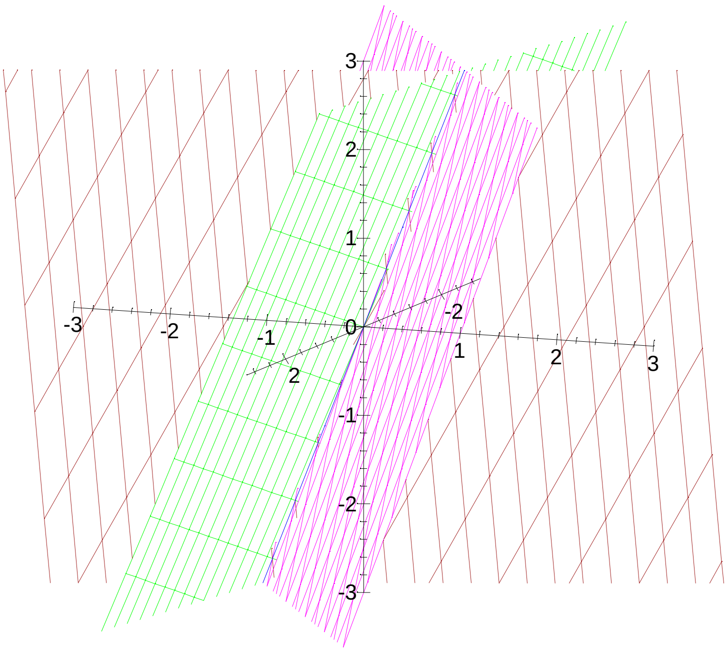
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{7} = \frac{z}{19}$$

El caso 1º) $k = -8$

$$\pi_2 := x + 8y - 3z = 0$$

$$z = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}y$$

Este plano $\pi_2(-8)$ es otro de los planos del haz de planos de eje r



$$2x - 3y + z = 0$$

$$5x + 2y - z = 0$$

$$x + 8y - 3z = 0$$

$$r = [x = \lambda, y = 7\lambda, z = 19\lambda]$$