MATHpines Prof. M.Díaz-Pinés	MATEMÁTICAS APLICADAS CC.SS. SELECTIVIDAD junio 2005 Metodología de RESOLUCIÓN UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN A

4. (Puntuación máxima : 2 puntos)

En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2 .

(a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional

(b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95% , ¿ a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar ?

Metodología de la Resolución

Se trata de un problema de Probabilidad y Estadística
Es una distribución normal de medias, con cálculo de intervalo de confianza y tamaño de muestras

D) Datos
a)
D1. $\mathrm{m}(X) = 5$
D2. $\sigma = 2$
D3. Nivel de confianza : 80 %
b)
D4. Nivel de confianza : 95 %
D5. El error máximo de estimación se fija en 0.25 libros

C) Cuestiones
c1. Intervalo de confianza para las condiciones dadas
c2. Tamaño mínimo n de la muestra para las condiciones dadas

T) Teoría y Propiedades que relacionan D) y Q)

T1. $\mathrm{m}(X)$: media muestral , μ : media de la población ,
σ : desviación típica de la población

T2. Desviación típica de las medias muestrales $\sigma_{\mathrm{m}(X)} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

T3. La población sigue una distribución normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$

La variable aleatoria $\mathrm{m}(X)$, media muestal , sigue una distribución normal $\mathrm{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

T4. Si se tipifica la variable $\mathrm{m}(X)$ tenemos $Z = \dfrac{\mathrm{m}(X) - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ que se aproxima a $\mathrm{N}(0, 1)$

T5. La probabilidad P($-z_{\frac{\alpha}{2}} <$ $\dfrac{\mathrm{m}(X) - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}$) = $1 - \alpha$

T6. De la expresión anterior =>

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mathrm{m}(X) - \mu \le \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{m}(X) - \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} < \mu \le \mathrm{m}(X) + \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza

$$\mathrm{IC} = \left(\mathrm{m}(x) - \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \; , \; \mathrm{m}(x) + \frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right)$$

T7. El radio $\dfrac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$ del IC es el "error máximo " E => margen de error : 2E

T8. El tamaño n de la muestra es :

$$n = \left(\frac{\sigma z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2$$

T9. El nivel de confianza es ($1 - \alpha$) => α => $\dfrac{\alpha}{2}$ => $z_{\frac{\alpha}{2}}$ mediante las Tablas de la $\mathrm{N}(0, 1)$ u otras técnicas como la integración de las funciones correspondientes

P) Planteamiento de Resolución

P1) Calculamos $\dfrac{\alpha}{2}$ y su correspondiente $z_{\frac{\alpha}{2}}$

P2) La probabilidad de la diferencia $\mathrm{m}(X) - \mu$ está acotada mediante el intervalo

de radio $\dfrac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}}$, => $\left| \mathrm{m}(x) - \mu \right| \le \dfrac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}}$

P3)

$$P\left(\left| \mathrm{m}(X) - \mu \right| \le \frac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

P4) Resolvemos la desigualdad que expresa $\sqrt{n}$ y hallamos n

RESOLUCIÓN

La media de la muestra es : 5

$n = 10000$

$$\mathrm{m}(X) \sim \mathrm{N}\left(5, \frac{2}{\sqrt{10000}} \right) = \mathrm{N}\left(5, \frac{2}{100} \right) = N\,(\,5 \,,\, 0.02\,)$$

$$\mathrm{m}(X) \sim \mathrm{N}\,(\,5 \,,\, 0.02\,)$$

Radio del I.C.

$$\frac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para $1-\alpha$ = 0.80 => α = 0.2 , $\frac{\alpha}{2}$ = 0.1

$$[z_{\frac{\alpha}{2}}] = z_{.1} = 1.28$$

$$P\left(\left|\mathrm{m}(X)-\mu\right| \le \frac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{m}(X)-5\right| \le \frac{[1.28]\,2}{100}\right) = 0.80$$

El radio del I.C. es

$$\frac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1.28\;2}{100}\right] = 0.0256$$

La media μ ha de estar en el intervalo (I.C.) :

$$[\,\mathrm{m}(X) - \frac{\sigma\, z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\;,\; \mathrm{m}(X) + \frac{\sigma\, z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\,]$$

$\left|\mathrm{m}(X)-5\right|$ = 0.0256 : [5 - 0.0256 , 5 + 0.0256]

[4.9744 , 5.0256]

b) El error máximo ha de ser 0.25

Ahora $1-\alpha$ = 0.95 => α = 0.05 , $\frac{\alpha}{2}$ = 0.025

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{.025} = 1.96$$

$$\left(\frac{[z_{\frac{\alpha}{2}}]\,\sigma}{\varepsilon}\right)^2 \le n$$

E = 0.25

$$\left(\frac{1.96\;2}{\frac{1}{4}}\right)^2 = (4\;3.92)^2 = 245.862$$

Por tanto n debe ser superior a 24

$$245.862 \le n$$

El tamaño mínimo de la muestra es $n = 246$

<u>Ampliación</u>

Vamos a estudiar el apartado a)

Cálculo automático de la distribución normal $\mathrm{N}(0, 1)$

La función $\mathrm{f}(x)$ es la función de densidad normal y $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,dt$ es la función de distribución normal

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathbf{e}^{(-1/2\,x^2)}}{\sqrt{\pi}}$$

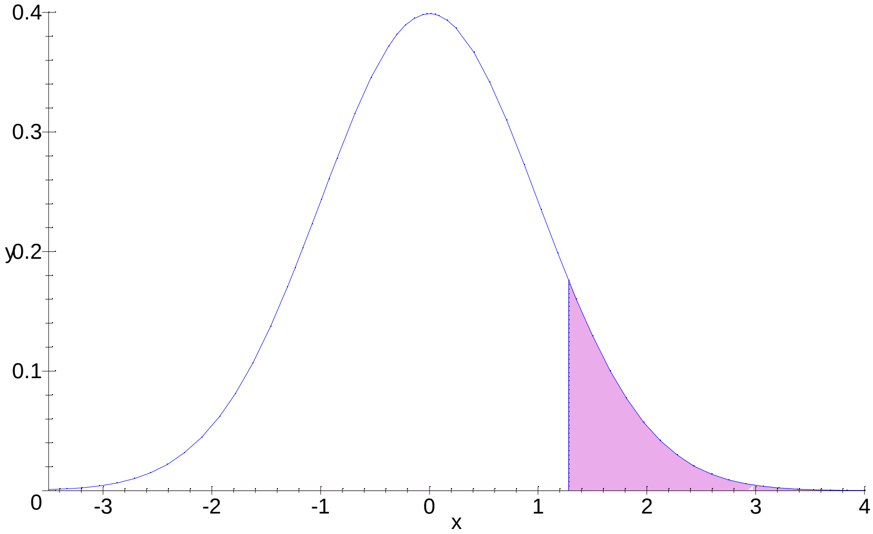
$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{(-1/2\, t^2)}}{\sqrt{\pi}}\, dt$$

$$F(1.28) = .8997$$

$$P(z \le 1.28) = .8997$$

$$P(1.28 \le z) = .1003$$

Gráfica



N(0, 1), [1.28, ∞]

Solución

a) I.C. = [4.9744 , 5.0256]

b) Tamaño mínimo : 246