MATHpines

Prof. M.Díaz-Pinés

MATEMÁTICAS II (CNS y Tecnológico)

SELECTIVIDAD junio 2005
Metodología de RESOLUCIÓN

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

4. (3 puntos). Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \qquad s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) (1,5 puntos) . Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.
b) (1,5 puntos) . Calcular la mínima distancia entre r y s

Resolución

Cuestión previa
Como se verá después, el proponente del problema sólo ha pensado en un único método (el que aquí llamamos 2º)) y no ha se ha molestado en hacerlo por otros métodos, que dan unos resultados parciales que , por su mal aspecto , pueden hacer pensar al alumno que ha tomado un mal camino , quitándole tiempo y generando incertidumbre.
Conviene cuidar estos detalles.

Desarrollo metodológico
I . Localización del problema
Geometría del espacio
Rectas
Rectas que se cruzan
Pies de la perpendicular común
Perpendicular común
Distancia mínima
II. Datos y cuestiones
d) Datos
d1. Nos dan dos rectas que se cruzan

c) Cuestiones
c1. Ecuación de la recta perpendicular común a ambas
c2. Distancia mínima

III. Análisis del problema
a1) Se trata de hallar los pies de la perpendicular común
a2) La distancia entre ellos (módulo del vector que determinan) es la distancia mínima d
a3) La recta que determinan es la perpendicular común p

IV. Planteamiento
p1) La expresión de r ya nos da un punto genérico R_λ de r . Análogamente tenemos S_μ de s
p2) Formamos el vector $R_\lambda S_\mu$

p3) Le imponemos que sea ortogonal a v_r y a v_s (o que sea proporcional a $\omega = v_r$ x v_s)
Ello nos proporciona unos valores concretos de λ y μ que corresponden a R y a S, que son los pies de p
Ahora aplicamos a2) y a3)

Método 2º de obtener la perpendicular común p

El vector $w = v_r$ x v_s es el vector ortogonal de los planos paralelos que contienen a r y a s que llamaremos π_r y π_s
y que son ortogonales a la recta p perpendicular común
Consideremos ahora el plano π_1 que pasa por r y es perpendicular a π_r (y también a π_s)
Análogamente consideramos el plano π_2 que pasa por s y es pependicular a π_s (y también a π_r)
El plano π_1 queda determinado por un punto de r y el vector v_r x w que es un vector ortogonal a π_1
Análogamente para π_2
Los puntos de cada recta podemos tomarlos como los que nos dan en su expresión continua

V. Ampliación
Gráfica espacial de las rectas (y los planos auxiliares) y el segmento de mínima distancia

Resolución

Esquema gráfico

Método 1º)
Cálculo de los pies de la perpendicular común

Cuestión previa
Comprobación de que se trata de dos rectas que se " cruzan " : que tienen direcciones diferentes y que no se cortan, estando situadas en dos planos paralelos

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas se crucen es que exista un paralelepípedo determinado por v_r , v_s y el vector formado por dos puntos A_r y B_s cualesquiera de r y s
Ese paralelepípedo ha de tener un volumen no nulo : el producto mixto $[v_r, v_s, A_r B_s] \neq 0$

La recta r es :

$$[x = 1 + 2\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = 1 + 4\lambda]$$

Un vector de dirección de r es :

$$v_r := [2, 3, 4]$$

Un punto concreto de r es :

$$A_r := [1, 1, 1]$$

La recta s es :

$$[x = -1 + \mu, y = 2 - \mu, z = 2\mu]$$

Un vector de dirección de s es :

$$v_s := [1, -1, 2]$$

Un punto concreto de s es :

$$B_s := [-1, 2, 0]$$

Comprobación de que las recta r y s que se cruzan :

$$A_r B_s = [-2, 1, -1]$$

$$[v_r, v_s, A_r B_s] = \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$[v_r, v_s, A_r B_s] = -15$$

$$[v_r, v_s, A_r B_s] \neq 0$$

Por tanto, r y s se cruzan

Podemos aprovechar para calcular la *distancia mínima* d

Es el cociente entre el volumen del paralalelepípedo y el área del paralelogramo determinado por v_r y v_s

Es decir,

$$d = \left| \frac{[v_r, v_s, A_r B_s]}{|v_r \, x \, v_s|} \right|$$

$$v_r = [2, 3, 4], v_s = [1, -1, 2]$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si llamamos $\omega = v_r$ x v_s

$$\omega = 10\, i - 5\, k$$

$$\omega := [10, 0, -5]$$

$$\omega = 5\,[2, 0, -1]$$

Este vector ω es el ortogonal a los planos π_r y π_s que pasan por r y s y son ortogonales a la recta perpendicular común

$$\omega = \mathrm{pv}([2, 3, 4], [1, -1, 2])$$

$$\mathrm{pv}([2, 3, 4], [1, -1, 2]) = [10, 0, -5]$$

$$|\omega| = 5\sqrt{5}$$

$$d = \left| -\frac{15}{5\sqrt{5}} \right|, u$$

$$d = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

Cálculo de los pies de la perpendicular común

$$R_\lambda := [1 + 2\,\lambda, 1 + 3\,\lambda, 1 + 4\,\lambda]$$

$$S_\mu := [-1 + \mu, 2 - \mu, 2\,\mu]$$

$$R_\lambda S_\mu = [-2 - 2\,\lambda + \mu, 1 - 3\,\lambda - \mu, -1 - 4\,\lambda + 2\,\mu]$$

Los pies R y S de la perpendicular común forman un vector RS ortogonal a v_r y a v_s

Lo que es equivalente a que RS es colineal (proporcional) a $\omega = v_r$ x v_s : producto vectorial de v_r y v_s

El vector de la perpendicular común podemos tomarlo como $w = \frac{\omega}{5}$:

$$w := [2, 0, -1]$$

Ahora podemos imponer la proporcionalidad de RS y w , o bien imponer la ortogonalidad de w con v_r y con v_s :

$$w\, v_r = 0 \quad , \quad w\, v_s = 0$$

$$eq1 := -5 - 29\,\lambda + 7\,\mu = 0$$

$$eq2 := -5 - 7\,\lambda + 6\,\mu = 0$$

$$ec1 := 29\,\lambda - 7\,\mu = -5$$

$$ec2 := 10\,\lambda - 5\,\mu = -4$$

$$\{29\,\lambda - 7\,\mu = -5, 10\,\lambda - 5\,\mu = -4\}$$

$$\left\{\lambda = \frac{1}{25}, \mu = \frac{22}{25}\right\}$$

Los pies R y S de la perpendicular común p son :

$$R := \left[\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25}\right]$$

$$S := \left[\frac{-3}{25}, \frac{28}{25}, \frac{44}{25}\right]$$

Determinan el vector vp de dirección de la recta p

$$vp := \left[\frac{-6}{5}, 0, \frac{3}{5}\right]$$

$$vp = RS,\ d = |vp|$$

$$d = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

c.q.c.
La recta perpendicular común la podemos hallar por dos métodos

Método 1º)
Recta determinada por los pies R y S

$$R = \left[\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25}\right],\ S = \left[\frac{-3}{25}, \frac{28}{25}, \frac{44}{25}\right]$$

Es la determinada por uno de ellos y por el vector $RS = vp$

$$[x, y, z] = \left[\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25}\right] + \rho\left[\frac{-6}{5}, 0, \frac{3}{5}\right]$$

$$[x, y, z] = \left[\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25}\right] + \rho\left[-\frac{30}{25}, 0, \frac{15}{25}\right]$$

$$[x, y, z] = \left[\frac{27 - \rho\, 30}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29 + \rho\, 15}{25}\right]$$

$$[x, y, z] = \left[\frac{27}{25} + 2\,\nu, \frac{28}{25}, \frac{29}{25} - \nu\right]$$

En forma continua :

$$\frac{x - \frac{27}{25}}{2} = \frac{y - \frac{28}{25}}{0} = \frac{z - \frac{29}{25}}{-1}$$

$$\left[\frac{27}{25} + 2\,\lambda, \frac{28}{25}, \frac{29}{25} - \lambda\right]$$

En forma matricial vertical :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{25} \\ \frac{28}{25} \\ \frac{29}{25} \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Método 2º de obtener la perpendicular común p

El vector $w = v_r$ x v_s es el vector ortogonal de los planos paralelos que contienen a r y a s que llamaremos π_r y π_s y que son ortogonales a la recta p perpendicular común

Consideremos ahora el plano π_1 que pasa por r y es perpendicular a π_r (y también a π_s)

Análogamente consideramos el plano π_2 que pasa por s y es pependicular a π_s (y también a π_r)

El plano π_1 queda determinado por un punto de r y el vector v_r x w que es un vector ortogonal a π_1
Análogamente para π_2
Los puntos de cada recta podemos tomarlos como los que nos dan en su expresión continua

V. Ampliación
Gráfica espacial de las rectas (y los planos auxiliares) y el segmento de mínima distancia

Método 2º)
Los puntos de cada recta podemos tomarlos como los que nos dan en su expresión continua :

$$A_r(1, 1, 1) \text{ y } B_s(-1, 2, 0)$$

Estos dos planos se pueden expresar facilmente en su forma de determinante :

$$\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\pi_1 := 3x + 1 - 10y + 6z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\pi_2 := x - 9 + 5y + 2z = 0$$

La recta p pependicular común se puede expresar :

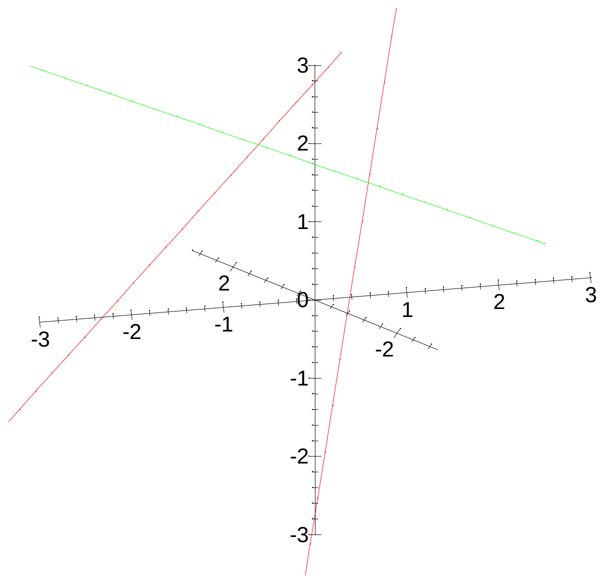
$$p : \{\pi_1, \pi_2\}$$

$$\{3x + 1 - 10y + 6z = 0, x - 9 + 5y + 2z = 0\}$$

Esta es la solución del proponente

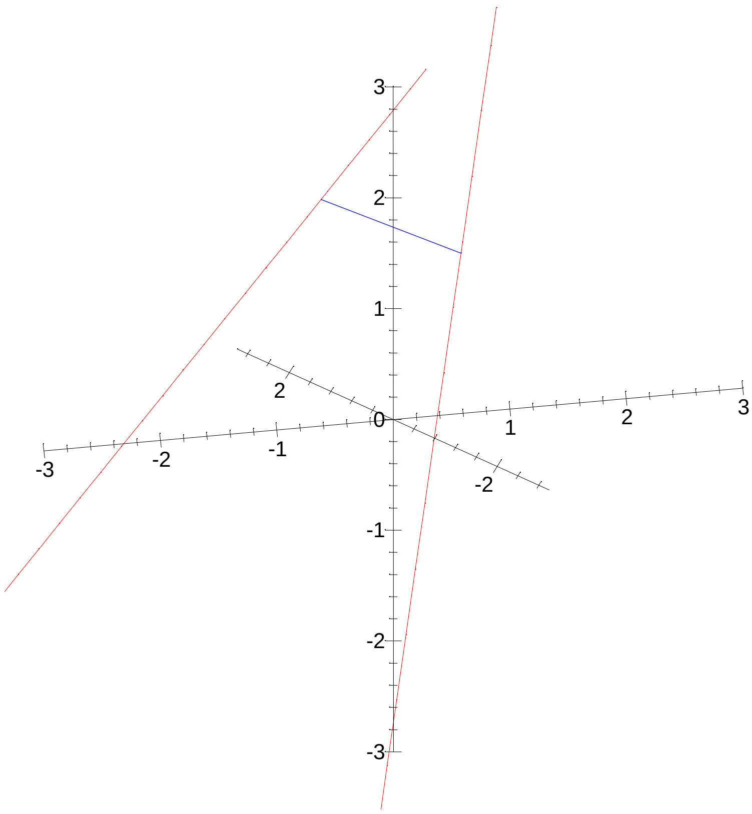
Ampliación

Gráficas



$$R = \left[\frac{27}{25}, \frac{28}{25}, \frac{29}{25}\right], S = \left[\frac{-3}{25}, \frac{28}{25}, \frac{44}{25}\right]$$

Gráfica de las rectas r y s, de la perpendicular común p y del segmento RS de los pies



Planos π_1 y π_2

$$3x + 1 - 10y + 6z = 0$$

$$z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} + \frac{5}{3}y$$

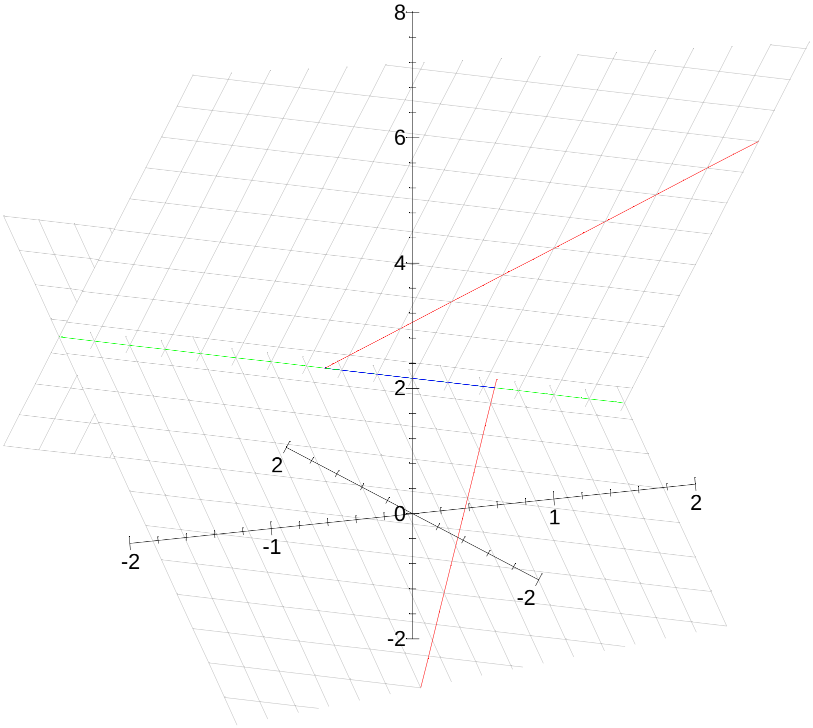
$$x - 9 + 5y + 2z = 0$$

$$z = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}y$$

$$\left[u, v, -\frac{1}{2}u + \frac{5}{3}v - \frac{1}{6}\right], \left[u, v, -\frac{1}{2}u - \frac{5}{2}y + \frac{9}{2}\right]$$

Expresión paramétrica

Gráfica que incluye también los planos π_1 y π_2


8
6
4
2
0
-2
-1
1
2
2
-2
-2