BLOQUE 1 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 1.A.- Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro.
[2.5 puntos]

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 6 & a \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 6 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2a-2=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{1\} = rang(A) = 3$$

$$a=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$$

CUESTIÓN 1.B.-
i) Enunciar el teorema de Rouche-Fröbenius**. [0.5 puntos]**
ii) Resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones siguiente: **[2 puntos]**

$$\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 2 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

i)

Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ***n*** ecuaciones lineales con ***p*** incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Lo podemos escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Por columnas lo podríamos escribir así :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} x_p = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En forma reducida quedaría así:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_px_p = B$$

Donde $\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{C_2}$ .... son las columnas de la matriz de coeficientes y ***B*** es la columna de términos independientes.

Teorema de Rouché-Fröbenius.

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Demostración :

1º Si el sistema es compatible, tiene solución; es decir existen $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tal que:

$$C_1 s_1 + C_2 s_2 + \cdots + C_p s_p = B$$

Sigue que la columna B es combinación lineal de las columnas :

$$C_1, C_2, \ldots, C_p$$

Por lo tanto la matriz de coeficientes tendrá el mismo número de columnas independientes que la matriz ampliada, es decir :

$$R(C) = R(A)$$

2º Si $R(C) = R(A)$, entonces el sistema es compatible.

En efecto:

$$R(C) = R(A) \quad \Rightarrow \quad R(C_1, C_2, \ldots, C_p) = R(C_1, C_2, \cdots, C_p, B)$$

Por tanto, la columna B es combinación lineal de las columnas:

$$C_1, C_2, \ldots\ldots, C_p$$

Y tienen que existir : $s_1, s_2, \ldots, s_p$ tales que:

$$C_1 s_1 + C_2 s_2 + \cdots + C_p s_p = B$$

De aquí sigue que : $s_1, s_2, \ldots, s_p$ es una solución; luego, el sistema es compatible.

Discutir o estudiar un sistema de ecuaciones lineales (método practico)

Lo mejor, casi siempre es tomar la matriz ampliada y hallar el rango poniendo la matriz en forma escalonada.

Pero hay casos particulares en que es mejor otro procedimiento. Si el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas, hallamos el determinante de la matriz de coeficientes y si es distinto de cero, el sistema es compatible y determinado. Si es igual a cero, calculamos el rango de la matriz ampliada, para lo que la podemos poner en forma escalonada, y comparamos los rangos

ii)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 1 + 3 - 4 - 2 = 10 \neq 0 \Rightarrow$$

$$rang(A) = 3 = \text{número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-6 + 6 + 2 + 9 + 2 + 4}{10} = \frac{17}{10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{8 + 2 + 3 + 2 + 12 - 2}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-18 + 2 + 1 - 3 - 4 + 3}{10} = -\frac{19}{10}$$

$$\text{Solución} \left(\frac{17}{10}, \frac{5}{2}, -\frac{19}{10} \right)$$

BLOQUE 2 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 2.A. Dada la recta r determinado por el punto **P = (1, 2 , -3)** y el vector dirección **v = (1 , -1 , 2),** calcule el punto de **r** mas cercano al punto **Q = (1 , 0 , 2)**. **[2.5 puntos]**

Calcularemos el plano π que contiene a **Q** y es perpendicular a la recta **r**, utilizando el vector director de esta como la del plano que es perpendicular al vector formado por el punto G, genérico del plano y el punto **Q** siendo su producto escalar nulo**,** posteriormente se calculará el punto de intersección **R** del plano y la recta que es el punto pedido.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1 , -1 , 2) \\ \overrightarrow{QG} = (x , y , z) - (1 , 0 , 2) = (x-1 , y , z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 , -1 , 2) \cdot (x-1 , y , z-2) = 0 \Rightarrow x-1-y+2\cdot(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-y+2z-5 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ int\,er\,sec\,ción \Rightarrow 1+\lambda-(2-\lambda)+2\,(-3+2\lambda)-5 = 0 \Rightarrow$$

$$1+\lambda-2+\lambda-6+4\lambda-5 = 0 \Rightarrow 6\lambda-12 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow R \begin{cases} x = 1+2 = 3 \\ y = 2-2 = 0 \\ z = -3+2\cdot 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$R(3 , 0 , 1)$$

CUESTIÓN 2.B. Dadas las rectas r_1: x = y = z y $\mathbf{r_2}$ determinada por los puntos **P = (1 , 2 , 3)** y **Q = (1 , -1 0),**calcule la ecuación de recta que une ambas rectas por el camino más corto**.** **[2.5 puntos]**

El vector director que determina la recta **s** es perpendicular a los de las dos rectas dadas por lo que sus productos escalares, de esa recta con la des dadas, son nulos

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v_{r_2}} = (1 , -1 , 0) - (1 , 2 , 3) = (0 , -3 , -3) \equiv (0 , 1 , 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\mu \\ z = 3+\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1-\lambda , 2+\mu-\lambda , 3+\mu-\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1 , 1 , 1) \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \\ \overrightarrow{v_{r_2}} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_2}} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1 , 1 , 1)(1-\lambda , 2+\mu-\lambda , 3+\mu-\lambda) = 0 \Rightarrow 1-\lambda+2+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda = 0 \Rightarrow 6+2\mu-3\lambda = 0 \\ (0 , 1 , 1)(1-\lambda , 2+\mu-\lambda , 3+\mu-\lambda) = 0 \Rightarrow 2+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda = 0 \Rightarrow 5+\mu-2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\mu-3\lambda = -6 \\ -2\mu+4\lambda = 10 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \mu-2\cdot 4 = -5 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1-4 , 2+3-4 , 3+3-4) = (-3 , 1 , 2)$$

$$S \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4-3\alpha \\ y = 4+\alpha \\ z = 4+2\alpha \end{cases}$$

BLOQUE 3 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 3.A. Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$, se pide:

i) Dominio y cortes con el eje x**. [0.5 puntos]**
ii) Estudio de regiones para el signo de f(x). **[0.5 puntos]**
iii) Límites en +∞ y –∞ y estudiar si existen asíntotas horizontales y oblicuas**. [0.5 puntos]**
iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. **[0.5 puntos]**
v) Representación gráfica aproximada**. [0.5 puntos]**

i)

$$4-x=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow f(4)=\frac{4^2}{4-4} \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{4\}$$

Corte con los ejes

$$\begin{cases} Con\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{0^2}{4-0}=\dfrac{0}{4}=0 \Rightarrow (0\ ,0) \\ Con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{x^2}{4-x} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0\ ,0) \end{cases}$$

ii)

$$Positivo \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x}>0 \Rightarrow \begin{cases} x^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ 4-x>0 \Rightarrow -x>-4 \Rightarrow x<4 \Rightarrow \forall x\in\Re/\,x<4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Positivo \Rightarrow \forall x\in\Re/\,x<4 \\ Negativo \Rightarrow \forall x\in\Re/\,x<4 \end{cases}$$

iii)

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x}=\frac{\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0-0}=\frac{1}{0}$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2}{4-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0+0}=\frac{1}{0}$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Continuación de la Cuestión 3A

iii)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{4-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\cdot(4-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x-x^2} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{x}-1}$$

$$m = \frac{1}{\frac{4}{\infty}-1} = \frac{1}{0-1} = \frac{1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{4-x}-(-1)x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{4-x}+x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-x^2}{4-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4-x} = \frac{\infty}{-\infty} =$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{4}{x}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{4}{x}-1} = \frac{4}{\frac{4}{\infty}-1} = \frac{4}{0-1} = -4 \Rightarrow$$

Existe asíntota oblicua $y = -x-4$ *cuando* $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{4-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2}{(-x)\cdot[4-(-x)]} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-4x-x^2} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{-\frac{4x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\frac{4}{x}-1}$$

$$m = \frac{1}{-\frac{4}{\infty}-1} = \frac{1}{-0-1} = \frac{1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{4-x}-(-1)x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(-x)^2}{4-(-x)}+(-x)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x-x^2}{4+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{4+x} = \frac{-\infty}{\infty} =$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{4x}{x}}{\frac{4}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{\frac{4}{x}+1} = \frac{-4}{\frac{4}{\infty}+1} = \frac{-4}{0+1} = -4 \Rightarrow$$

Existe asíntota oblicua $y = -x-4$ *cuando* $x \to -\infty$

iv)

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(4-x)-(-1)x^2}{(4-x)^2} = \frac{8x-2x^2+x^2}{(4-x)^2} = \frac{8x-x^2}{(4-x)^2} = \frac{x\cdot(8-x)}{(4-x)^2} \Rightarrow \textit{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x\cdot(8-x)}{(4-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 0 \\ 8-x > 0 \Rightarrow -x > -8 \Rightarrow x < 8 \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x < 8 \\ (4-x)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

Continuación de la Cuestión 3A

iv)

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(4-x)-(-1)x^2}{(4-x)^2}=\frac{8x-2x^2+x^2}{(4-x)^2}=\frac{8x-x^2}{(4-x)^2}=\frac{x\cdot(8-x)}{(4-x)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$$

$$\frac{x\cdot(8-x)}{(4-x)^2}>0\Rightarrow\begin{cases} x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,x>0\\ 8-x>0\Rightarrow -x>-8\Rightarrow x<8\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,x<8\\ (4-x)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$ **0**	**8**	∞
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x < 8	**(+)**	**(+)**	**(-)**
$(4 – x)^2$ > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-) f’(x) < 0**	**(+) f’(x) > 0**	**(-) f’(x) < 0**

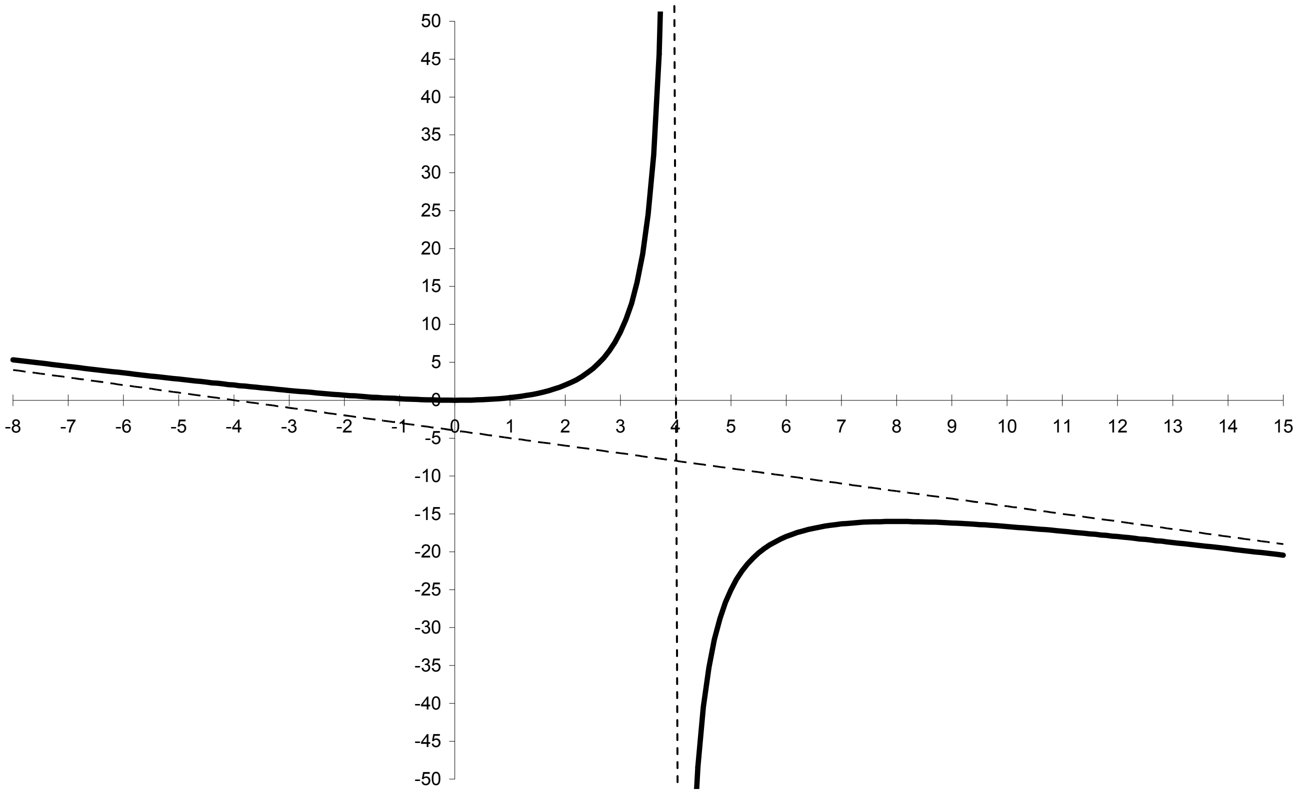
Crecimiento $\forall x\in\Re\,/\,0<x<8$

Decrecimiento $\forall x\in\Re\,/(x<0)\cup(x>8)$

Mínimo relativo en $x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0^2}{4-0}=\frac{0}{4}=0\Rightarrow(0\;,0)$ **el grafico cambia en ese punto de decrecimiento a crecimiento**

Máximo relativo en $x=8\Rightarrow f(0)=\frac{8^2}{4-8}=\frac{64}{-4}=-16\Rightarrow(8\;,-16)$ **el grafico cambia en ese punto de crecimiento a decrecimiento**

v)



CUESTIÓN 3.B. Se quiere construir una caja (sin tapadera) de base cuadrada y con un volumen de 250 cm^3. Calcule las dimensiones de la base y la altura de la caja para que su superficie sea mínima**. [2'5 puntos]**

$$\begin{cases} 250 = b^2 h \Rightarrow h = \dfrac{250}{b^2} \\ S = b^2 + 4bh \end{cases} \Rightarrow S = b^2 + 4b \cdot \frac{250}{b^2} = b^2 + \frac{1000}{b} \Rightarrow S' = 2b - \frac{1000}{b^2} = 2\frac{b^3 - 500}{b^2} \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow b^3 - 500 = 0 \Rightarrow b^3 = 500 \Rightarrow b = \sqrt[3]{500}$$

$$S'' = 2\frac{3b^2 \cdot b^2 - 2b\left(b^3 - 500\right)}{b^4} = 2\frac{3b^3 - b^3 - 1000}{b^3} = 4\frac{b^3 + 500}{b^3}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{500}\right) = 4\frac{\left(\sqrt[3]{500}\right)^3 + 500}{\left(\sqrt[3]{500}\right)^3} = 4 \cdot \frac{500 + 500}{500} = 4 \cdot \frac{1000}{500} = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = \sqrt[3]{500}\ cm. \\ h = \dfrac{250}{\left(\sqrt[3]{500}\right)^2} = \dfrac{250\left(\sqrt[3]{500}\right)}{500} = \dfrac{\sqrt[3]{500}}{2}\ cm. \end{cases}$$

BLOQUE 4 [2.5 PUNTOS]

CUESTIÓN 4.A.

Calcular la integral $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\, dx$ **[2'5 puntos]**

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 1 & x^2 + 1 \\ \hline \underline{-x^3 - x} & x \\ \quad -x + 1 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int x\, dx + \int \frac{-x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \int \frac{1}{2t}\, dt + arc\ tg\ x$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot ln\left|t\right| + arc\ tg\ x = \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot ln\left|x^2 + 1\right| + arc\ tg\ x + K$$

CUESTIÓN 4.B. Calcular el área encerrada por las funciones **f(x) = x^3 + x^2 + 1** y **g(x) = 2x+ 1**
[2.5 puntos]

Puntos de corte de las funciones con el eje OX

$$y = f(x) = g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 = 0 \Rightarrow No\ tiene\ soluciones \Rightarrow No\ corta\ a\ OX \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Puntos de corte entre funciones

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + x^2 + 1 = 2x + 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x^2 + x - 2)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$Cuando\ x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = -1 + 1 + 1 = 1 \\ g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \Rightarrow + \\ g(x) \Rightarrow - \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$Cuando\ x = \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 + 1 = -\dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{16} + 1 = \dfrac{67}{64} \\ g\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 1 = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \Rightarrow + \\ g(x) \Rightarrow + \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$Cuando\ x = \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{11}{8} \\ g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \Rightarrow + \\ g(x) \Rightarrow + \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x)$$

$$A = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \left| \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} g(x)\,dx \right| + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx =$$

$$A = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left[(x^3 + x^2 + 1) - (2x + 1) \right] dx + \int_{0}^{1} \left[(2x + 1) - (x^3 + x^2 + 1) \right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 + 1 - 2x - 1)\,dx + \int_{0}^{1} (2x + 1 - x^3 - x^2 - 1)\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx + \int_{0}^{1} (2x - x^3 - x^2)\,dx$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{-2}^{0} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-2}^{0} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{0}^{1} - \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{0}^{1} - \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{0}^{1}$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left[0^4 - (-2)^4\right] + \frac{1}{3} \cdot \left[0^3 - (-2)^3\right] - \left[0^2 - (-2)^2\right] + \left(1^2 - 0^2\right) - \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{0}^{1} - \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{0}^{1}$$

$$A = -\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{3}{4} = \frac{28 + 9}{12} = \frac{37}{12}\,u^2$$