MATHpines

Prof. M.Díaz-Pinés

MATEMÁTICAS II (CNS y Tecnológico)

SELECTIVIDAD junio 2005
Metodología de RESOLUCIÓN

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

OPCIÓN B

3. (3 puntos). Calcular los siguientes límites :

a) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$$

b) (1,5 puntos)

$$\lim_{x \to \infty} x \left[\operatorname{arctg}(\mathbf{e}^x) - \frac{\pi}{2} \right]$$

Desarrollo metodológico

I . Localización del problema

Análisis

Funciones reales

Funciones continuas

Límites

Funciones derivables

Teoremas

<u>Regla de L´Hôpital</u>

II. Datos y cuestiones

d) Datos

d1. Nos dan una función $f(x)$ conocida

d2. Nos piden su límite cuando $x \to \infty$

d3. La primera función es diferencia de radicales cuadráticos

La segunda es composición de $f(x) = \mathbf{e}^x$, $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$ y la propia $h(x) = x$

c) Cuestiones

c1. Los límites de cada función cuando $x \to \infty$

III. Análisis del problema

a1) Están pidiendo que se superen las indeterminaciones que surgen : $\infty - \infty$ e $\infty\,\infty$

a2) Al pedirnos $\lim_{x \to \infty} \phi(x)$, nos piden indirectamente que estudiemos la asíntota horizontal derecha de la curva de cada función

IV. Planteamiento

p1) Para la primera aplicamos el procedimiento de multiplicar y dividir por la expresión " conjugada ", entendiendo en este caso la suma de los minuendo y sustraendo dados

En la segunda, basta considerar que podemos pasar de la indeterminación $\infty\,\infty$ a la $\dfrac{\infty}{0}$

pasando el factor x a $\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$ y podemos aplicar L´Hôpital

p2) En el apartado a) la operación indicada rompe la indeterminación y se resuelve
En el apartado b) persiste y hay que reiterar la aplicación de L´Hôpital, aunque cabe acortar el proceso por equivalencia de " infinitos "

V. Ampliación **(No se pide)**

Estudio de esas fuciones y sus asíntotas horizontales por la derecha $x \to \infty$ (+)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$$

Su " conjugada " es :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}$$

$$f(x)\,g(x) = (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})\,(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})$$

Es " diferencia por suma " . Por tanto ,

$$(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})\,(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}) = 2\,x$$

Tenemos ahora la función

$$h(x) = 2\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

Aplicamos equivalencia de " infinitos " :

$$x^2 + x \sim x^2 \quad \text{y} \quad x^2 - x \sim x^2$$

Por tanto :

$$h(x) \sim \frac{2\,x}{x + x} = \frac{2\,x}{2\,x} = 1$$

<u>Comprobación automática</u>

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} = 1$$

b)

$$u(x) = x\left(\arctan(\mathbf{e}^x) - \frac{1}{2}\pi\right)$$

Al tender $x \to \infty$ tenemos una indeterminación $\infty\,\infty$
Definimos la función de este modo :

$$v(x) = \frac{\arctan(\mathbf{e}^x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

Ahora la indeterminación es del tipo $\frac{\infty}{0}$

Aplicamos la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left[\frac{1}{1 + \mathbf{e}^{(2\,x)}}\right]\mathbf{e}^x}{\left[-\frac{1}{x^2}\right]}$$

$$1 + \mathbf{e}^{(2\,x)} \sim \mathbf{e}^{(2\,x)} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{1 + \mathbf{e}^{(2\,x)}}\right]\mathbf{e}^x \sim \frac{1}{\mathbf{e}^x}$$

Por tanto,

$$\frac{\left[\frac{1}{1 + \mathbf{e}^{(2\,x)}}\right]\mathbf{e}^x}{\left[-\frac{1}{x^2}\right]} \sim -\frac{x^2}{\mathbf{e}^x}$$

$$\lim_{x \to \infty} -\frac{x^2}{\mathbf{e}^x} = 0$$

No ha sido preciso reiterar L´Hôpital , que también pue hacerse

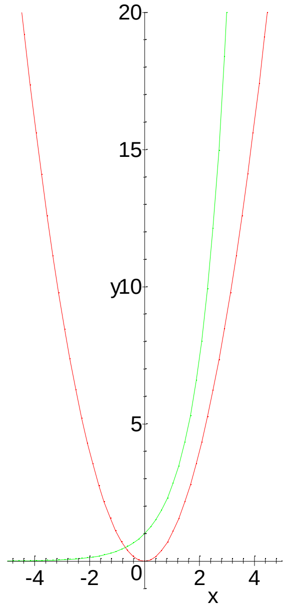
En el último paso, podríamos haberla aplicado dos veces y llegaríamos a $\lim_{x \to \infty} -\frac{2}{\mathbf{e}^x} = 0$

Pero no es preciso porque como "infinitos " $x^2 < \mathbf{e}^x$

Ampliación

Veamos cómo crecen las dos funciones $y = x^2$ e $y = \mathbf{e}^x$

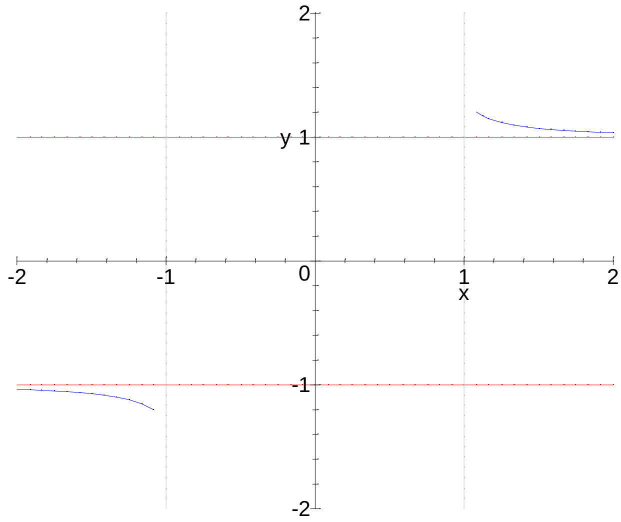
Gráfica



La función $y = \mathbf{e}^x$ supera a $y = x^2$ y su crecimiento relativo es cada vez mayor (las derivadas cumplen : $\mathbf{e}^x > 2\,x$) al menos para todo x real positivo

Ampliación

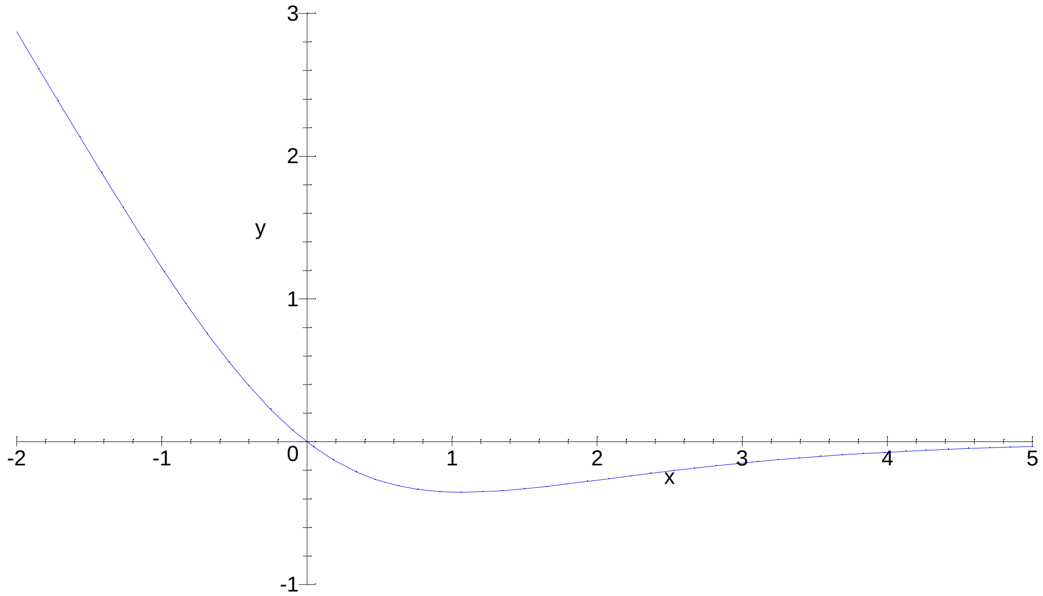
Gráficas



$$y = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x},\, y = 1,\, y = -1$$

Se observa cómo el dominio es $\Re$ - (-1, 1)

Segunda función



$$y = x\left(\arctan(\mathbf{e}^{x}) - \frac{1}{2}\pi\right), y = 0$$

Soluciones : a) 1
b) 0