UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Prof. Gabriel Rabanales R.

GUÍA 2 DE TRIGONOMETRÍA
Soluciones Guía 1 de Trigonometría

1. Tenemos: $0 < a \leq 90°$, y cumple con: 2 sen a +3 cos a = 2

Entonces usamos la igualdad para obtener "sen a":

$$2sena + 3\sqrt{1 - sen^2 a} = 2$$
$$3\sqrt{1 - sen^2 a} = 2 - 2sen\, a \quad /^2$$
$$9\left(1 - sen^2 a\right) = 4 - 8sen\, a + 4sen^2 a$$
$$9 - 9sen^2 a = 4 - 8sen\, a + 4sen^2 a$$
$$13sen^2 a - 8sena - 5 = 0$$
$$\Rightarrow sen\ a = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 260}}{26} = \frac{8 \pm 18}{26} = \begin{cases} \dfrac{26}{26} = 1 & \text{!es solución!} \\ \dfrac{-10}{26} = \dfrac{-5}{13} & \text{!no es solución!} \end{cases}$$

Luego: sen a = 1 $\Rightarrow$ cos a = 0 $\Rightarrow$ tg a no existe! (Se deduce que: a = 90°).

2. Si $a - b = \frac{p}{3}$, calcule: $(\cos a + \cos b)^2 + (\text{sen } a + \text{sen } b)^2$

Sea: $(\cos a + \cos b)^2 + (\text{sen } a + \text{sen } b)^2 = \boldsymbol{E}$.

Entonces:

$$\boldsymbol{E} = \cos^2 a + 2\cos a \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a + 2\text{sen} a\, \text{sen} b + \text{sen}^2 b$$
$$= 2 + 2\cos a \cos b + 2\text{sen} a\, \text{sen} b$$
$$= 2 + 2\left(\cos a \cos b + \text{sen} a\, \text{sen} b\right)$$
$$= 2 + 2\cos\left(a - b\right)$$
$$= 2 + 2\cos\frac{p}{3} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

3. Demuestre las siguientes identidades:

$$(b)\ sen^4 a + 2sen^2 a\left(1 - \frac{1}{\csc^2 a}\right) = 1 - \cos^4 a$$

$$sen^4 a + 2sen^2 a\left(1-\frac{1}{\csc^2 a}\right) = sen^4 a + 2sen^2 a\left(1-sen^2 a\right)$$
$$= \left(sen^2 a\right)^2 + 2\left(1-\cos^2 a\right)\cos^2 a$$
$$= \left(1-\cos^2 a\right)^2 + 2\cos^2 a - 2\cos^4 a$$
$$= 1-2\cos^2 a + \cos^4 a + 2\cos^2 a - 2\cos^4 a$$
$$= 1-\cos^4 a$$

(e) $\left(\cos\frac{a}{2}-\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)^2 = 1-\operatorname{sen}a$

$$\left(\cos\frac{a}{2}-\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{a}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$
$$= 1-2\cos\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{a}{2}$$
$$= 1-2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \qquad \left[2\operatorname{sen}a\cos a = \operatorname{sen}2a\right]$$
$$= 1-\operatorname{sen}a$$

(h) $1+\tan 2q\tan q = \sec 2q$

$$1+\tan 2q\tan q = 1+\frac{\operatorname{sen}2q}{\cos 2q}\cdot\frac{\operatorname{sen}q}{\cos q}$$
$$= 1+\frac{2\operatorname{sen}q\cos q}{\cos 2q}\cdot\frac{\operatorname{sen}q}{\cos q}$$
$$= 1+\frac{2\operatorname{sen}^2 q}{\cos 2q}$$
$$= \frac{\cos 2q + 2\operatorname{sen}^2 q}{\cos 2q}$$
$$= \frac{\cos^2 q - \operatorname{sen}^2 q + 2\operatorname{sen}^2 q}{\cos 2q}$$
$$= \frac{\cos^2 q + \operatorname{sen}^2 q}{\cos 2q}$$
$$= \frac{1}{\cos 2q}$$
$$= \sec 2q$$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

(b) $2\operatorname{sen}f + \csc f = 3$

$$2\text{sen} f + \frac{1}{\text{sen} f} = 3 \qquad / \text{sen} f$$

$$2\text{sen}^2 f + 1 = 3\text{sen} f$$

$$2\text{sen}^2 f - 3\text{sen} f + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen} f = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entonces tenemos, para: $0 \le f \le 2p$, las soluciones particulares:

(i) $\text{sen} f = 1 \quad \Rightarrow \quad f = 90^0 = \frac{p}{2}$

$$(ii)\ \text{sen} f = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ f = \begin{cases} 30^0 = \frac{p}{6} \\ 150^0 = \frac{5p}{6} \end{cases}$$

Y las soluciones generales son: $\frac{p}{2} + 2kp$, $\frac{p}{6} + 2kp$, $\frac{5p}{6} + 2kp$, $\quad k \in$ ¢

(e) $8\text{sen}^2 b - 2\cos b = 3$

$$8\text{sen}^2 b - 2\cos b = 3 \qquad / -3$$

$$8\text{sen}^2 b - 2\cos b - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen} b = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \\ \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Entonces tenemos, para: $0 \le f \le 2p$, las soluciones particulares:

(i) $\text{sen} b = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = arc\text{sen}\left(\frac{3}{4}\right)$

$$(ii)\ \text{sen} b = \frac{-1}{2} \ \Rightarrow \ b = \begin{cases} 210^0 = \frac{7p}{6} \\ 330^0 = \frac{11p}{6} \end{cases}$$

Para las soluciones generales se suma el período de la función “sen”: $2kp$, $\ k \in$ ¢

(f) $\cot x - \tan x = 2$ Respuesta: $\frac{p}{8}, \ \frac{9p}{8}, \ \frac{5p}{8}, \ \frac{13p}{8}$, $\ (+kp, k \in$ ¢, para sols.generales$)$

5. Resuelva las ecuaciones:

$$(b)\ Arctg\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}Arctgx$$

Sean: $Arctg\frac{1-x}{1+x}=a$ y $Arctgx=b$. Entonces: $\begin{cases} Arctg\frac{1-x}{1+x}=a \Rightarrow tga=\frac{1-x}{1+x} & (*) \\ Arctg\ x=b \Rightarrow tgb=x \end{cases}$

Volviendo a la ecuación (b) y reemplazando, tenemos:

$$a=\frac{1}{2}b \Rightarrow 2a=b \quad / \text{ tg} \qquad [\text{Tomamos tg en ambos miembros}]$$

$$tg2a=tgb$$

$$\frac{2tga}{1-tg^2a}=tgb$$

$$\frac{2\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}=x \qquad [\text{Reemplazamos con } (*)]$$

$$\frac{2(1-x^2)}{4x}=x \qquad [\text{Simplificamos}]$$

$$3x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\end{cases} \quad \text{!Son soluciones!}$$

6. Demuestre que en un triángulo ABC se cumple que: $\frac{\text{sen}(a-b)}{\text{sen}(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$

Usando el teorema del seno tenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}a}=\frac{b}{\text{sen}b}=\frac{c}{\text{sen}g}=k \Rightarrow \begin{cases} a=k\text{sen}a\\ b=k\text{sen}b\\ c=k\text{sen}g\end{cases}$$

Además: $a+b+g=p \Rightarrow a+b=p-g \Rightarrow \text{sen}(a+b)=\text{sen}g$.

Entonces:

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{k^2\text{sen}^2a-k^2\text{sen}^2b}{k^2\text{sen}^2g}=\frac{\text{sen}^2a-\text{sen}^2b}{\text{sen}^2g}$$

$$=\frac{(\text{sen}a+\text{sen}b)(\text{sen}a-\text{sen}b)}{\text{sen}^2(a+b)}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot 2\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}^2(a+b)}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}^2(a+b)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}^2(a+b)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}$$