

Capítulo 3

Termodinámica y mecánica estadística

versión 20 de septiembre de 2010

La mecánica estadística busca una descripción físicamente consistente de sistemas constituidos por muchas partículas, de la cual debe poderse derivar las propiedades macroscópicas del sistema, las siguen una descripción termodinámica - válida sólo en equilibrio termodinámico, por definición.

3.1. Termodinámica

3.1.1. Las leyes de la termodinámica

La termodinámica estudia el comportamiento de sistemas *macroscópicos* descritos por variables como su energía, presión, volumen, temperatura o incluso tensión, magnetización, etc.... La termodinámica no considera el estado *microscópico* del sistema, dado por los estados de las partículas individuales que lo componen.

El formalismo de la termodinámica se basa en el concepto de temperatura, definido a partir del concepto de equilibrio termodinámico:

un sistema está en equilibrio termodinámico si las variables que lo describen no varían con el tiempo.

De manera equivalente, dos sistemas están en equilibrio termodinámico mutuo si al entrar en contacto las variables termodinámicas respectivas no varían. Por definición la termodinámica se aplica a sistemas en equilibrio y se basa en las leyes brevemente descritas a continuación.

Ley cero - definición de temperatura

Si de tres sistemas A, B y C, los sistemas A y B se encuentran cada uno en equilibrio termodinámico con C, entonces A y B se encuentran en equilibrio uno con el otro.

La ley cero define el concepto de temperatura a través de los conjuntos de sistemas en equilibrio mutuo (*clases de equivalencia*): si A y B están en equilibrio entonces $T_A = T_B$.

Primera ley - conservación de la energía

El cambio en energía interna U de un sistema cerrado de temperatura T , entropía S , volumen V , presión P , potencial químico μ y N partículas está dado por,

$$dU = \bar{d}Q - P dV + \mu dN + \sum_i X_i dx_i, \quad (3.1)$$

donde Q representa el cambio de energía térmica, o calor. La primera ley sintetiza la conservación de la energía incluyendo la energía interna y la energía térmica, que a su vez incluye la entropía, dentro de Q . La cantidad Q no está definida en términos de una diferencial exacta, hecho que denotamos con la diferencial "inexacta" \bar{d} . Esto equivale a decir que Q no es una variable de estado, al no poderse relacionar un valor de la variable Q a un estado del sistema. La forma diferencial exacta de la energía térmica es $\bar{d}Q = TdS$, siendo S la entropía.

El término en sumatoria a la derecha en (3.1) indica explícitamente el conjunto de variables físicas que pueden almacenar energía. Estas se agrupan en pares de variables *conjugadas*, formados por una variable intensiva (X_i), independiente de las dimensiones del sistema, y una variable extensiva (x_i), que depende de las dimensiones del sistema, contribuyendo a la energía interna con $X_i dx_i$. Ejemplos son el campo magnético H y la magnetización M ($\rightarrow HdM$), el campo eléctrico E y la polarización P ($\rightarrow EdP$).

Segunda ley - comportamiento de la entropía

En un sistema cerrado la entropía nunca decrece,

$$dS \geq 0. \quad (3.2)$$

Como consecuencia un sistema establece su equilibrio en un estado de máxima entropía. Procesos que implican $dS = 0$ en un sistema cerrado son *reversibles*, mientras que aquellos que implican $dS > 0$ son irreversibles.

Los principios de máxima entropía y mínima energía establecen que el equilibrio termodinámico entre dos sistemas requiere no solo $T_A = T_B$ (equilibrio térmico), sino también $P_A = P_B$ (equilibrio mecánico). El requerimiento extra de equilibrio químico se traduce en $\mu_A = \mu_B$. El equilibrio requiere una relación entre las variables del sistema denominada *ecuación de estado*.

Tercera ley - el estado de mínima energía

La entropía de un sistema se anula en el estado para el cual

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} = 0 \quad .$$

Este estado corresponde al de mínima energía interna, el cual define $T = 0$ dentro de una escala absoluta de temperatura. La tercera ley define el cero absoluto de temperatura en el punto donde la entropía se anula¹.

3.1.2. Termodinámica de un gas ideal clásico

Para definir un sistema termodinámico es necesario especificar su ecuación de estado, la cual relaciona (o incluso define) la temperatura T con variables como la presión, P , y volumen, V . La ecuación de estado de un gas ideal clásico está dada por

$$PV = NkT \tag{3.3}$$

siendo N el número total de partículas en el gas y k la constante de Boltzmann ($k \simeq 1.380650 \times 10^{-16} \text{erg K}^{-1}$). De esta ecuación se desprende que en un *proceso isotérmico* (T constante) que lleva al sistema de un estado 0 a un estado 1 se cumple $P_0V_0 = P_1V_1$.

Un concepto práctico para describir intercambios energéticos de un sistema es el de los calores específicos, definidos para volumen y presión constantes:

$$C_v \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v, \quad C_P \equiv \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P, \tag{3.4}$$

respectivamente. Para el gas ideal se tiene, empleando $dQ = dU + PdV$,

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT}, \quad C_P = \frac{dU}{dT} + P \left(\frac{dV}{dT}\right)_P = C_V + Nk, \tag{3.5}$$

¹Para referencias generales a la termodinámica véase los libros de termodinámica de García-Colín y Callen

la energía interna U siendo independiente de V . Se define el “índice adiabático” como el cociente de calores específicos, $\gamma \equiv C_p/C_v$; de su definición se desprende que $\gamma = 1 + Nk/C_V = 1 + Nk/(dU/dT)$ y

$$U = \frac{NkT}{\gamma - 1}.$$

Para un gas ideal compuesto por partículas monoatómicas tenemos $\gamma = 5/3$ y $U = 3NkT/2$; para un gas ideal compuesto por moléculas diatómicas, se tiene $\gamma = 7/5 \Rightarrow U = 5NkT/2$.

En el caso de un proceso adiabático ($dS = 0$, por tanto reversible) tenemos $TdS = dU + PdV = 0$. Usando $dU = C_V dT = (C_V/Nk) d(PV) = (\gamma - 1)(PdV + VdP)$ llegamos a la relación que caracteriza a un proceso adiabático,

$$PV^\gamma = \text{constante}. \quad (3.6)$$

3.1.3. Termodinámica de un gas de fotones

Un gas de fotones cumple la relación $P = u/3 = U/3V$. La ecuación de estado se obtiene de la expresión para $u(T)$. Dado que la densidad de energía, $u = U/V$, depende solamente de la temperatura tenemos

$$TdS = V \left(\frac{du}{dT} \right) dT + \frac{4}{3}u dV,$$

y empleando $\partial^2 S/\partial V \partial T = \partial^2 S/\partial T \partial V$ se llega a la relación:

$$u(T) = aT^4, \quad (3.7)$$

siendo a una constante por especificar (§2.3). Se desprende que $P = aT^4/3$ es la ecuación de estado del gas de fotones. Un proceso adiabático cumple $PV^{4/3} = \text{cte}$, equivalente a un índice $\gamma = 4/3$.

3.2. Mecánica estadística

3.2.1. Descripción estadística de un sistema

La mecánica estadística interpreta las variables macroscópicas como la manifestación estadística de las propiedades microscópicas individuales de un sistema de muchas partículas. En particular, se busca deducir las propiedades termodinámicas del sistema macroscópico basándose en una descripción estadística. Hay cuatro requisitos básicos para dar una descripción

estadística de un sistema físico: (1) especificar el estado del sistema; (2) especificar el espacio de estados accesibles, o *ensemble estadístico*; (3) especificar la probabilidad de cada estado; (4) hacer el cálculo estadístico.

1. Estado de un sistema

La descripción del estado de un sistema puede darse conforme las leyes de la mecánica clásica o la mecánica cuántica, dependiendo de cual sea más exacto y práctico. En mecánica clásica el estado de una partícula en un instante t puede describirse dando su posición y momento, $\{\vec{x}(t), \vec{p}(t)\}$, suponiendo que tenemos el conocimiento necesario para calcular las fuerzas que actúan sobre la partícula. En el caso de un sistema de N partículas, requeriríamos el conjunto de posiciones y momentos, $\{\vec{x}_j, \vec{p}_j; j = 1, \dots, N\}$, que basta para especificar el (micro)-estado del sistema, dado que en principio conocemos la interacción entre las partículas, que da lugar a la fuerza que siente la i -ésima partícula, $\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ y a como evolucionan su posición y momento. Esto es posible en principio pero no en la práctica.

En mecánica cuántica el estado de un sistema queda definido por su función de onda, $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$, que depende de las $3N$ coordenadas de las partículas. Frecuentemente la función de onda puede escribirse en términos de otras variables, concretamente los números cuánticos. Por ejemplo, un sistema formado por dos osciladores armónicos tridimensionales está plenamente definido si especificamos los seis números cuánticos $\{n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}, n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}\}$. Las funciones de onda $\psi_{\{n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}, n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}\}}$ son enumerables y podemos hacer la estadística del sistema. Nótese que hay varios estados con misma energía, $E = (n_{1x} + n_{1y} + n_{1z} + n_{2x} + n_{2y} + n_{2z} + 3)\hbar\omega$.

En general, el localizar los estados dentro del espacio-fase de posiciones y momentos es particularmente ventajoso. Esta descripción no especifica el estado de cada partícula, sino cuantas partículas tienen mismo estado definido por una posición \vec{x} y un momento \vec{p} . Cada par $\{\vec{x}, \vec{p}\}$ define un punto en el espacio-fase y la descripción del sistema está completa si se especifica la *ocupación del espacio-fase*. En mecánica cuántica el principio de exclusión de Pauli prohíbe que dos partículas tengan el mismo estado, dentro de la indeterminación inherente a la mecánica cuántica, que fija el tamaño de las celdas del espacio fase a $\Delta x \Delta p = h/2\pi$, con $h \simeq 6.626 \times 10^{-27}$ erg s la constante de Planck (Figura 3.1). El límite clásico corresponde a $h \rightarrow 0$, el paso de celdas discretas a continuas. Una descripción cuántica completa

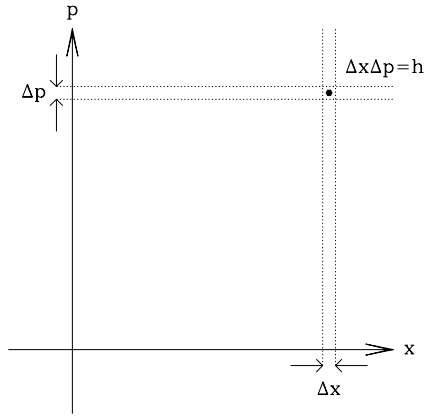


Figura 3.1: La división del espacio fase en celdas de tamaño $\Delta x \Delta p = \hbar$.

considera el espín de las partículas, pudiendo ser entero -bosones- o semientero -fermiones. Los fermiones cumplen el principio de exclusión de Pauli: dos partículas con mismo espín no pueden ocupar la misma celda de espacio-fase; los bosones no sufren esta restricción, dando lugar a comportamientos distintos para gases de fermiones y bosones.

2. Ensemble estadístico

Podemos especificar un estado arbitrario de nuestro sistema, pero no todos los estados son consistentes con una medición macroscópica. El fijar la energía total del sistema a un valor E restringe fuertemente el conjunto de microestados posibles a aquellos que cumplen esta restricción, o *estados accesibles*. Supongamos un sistema de cuatro partículas, pudiendo cada una de ellas tomar como energía un valor entero entre 1 y 10. El número total de estados que uno puede construir es $10^4 = 10000$, de los cuales 35 son accesibles si la energía total es $E = 8$.

La restricción que se impone define el tipo de *ensemble* estadístico en cuestión. Los dos ensembles que veremos son el canónico, donde la restricción al sistema está en asignar a la energía a un valor E , y el gran canónico, que restringe energía y número de partículas, $\{E, N\}$.

3. Probabilidad de un estado

La probabilidad de un estado dado está dada por el siguiente postulado fundamental:

en un sistema aislado en equilibrio todos los estados accesibles tienen misma probabilidad.

En el ejemplo de la sección anterior, si el sistema tiene una energía total $E = 8$ la probabilidad de que las cuatro partículas tengan la misma energía es $P_{2222} = 1/35$.

Este postulado trae implícito el principio de máxima entropía. El sistema puede adquirir de manera estadística todos los estados accesibles, maximizando el desorden microscópico del mismo. La entropía se define a partir de Ω , el número de estados accesibles,

$$S(E) \equiv k \ln \Omega(E), \quad (3.8)$$

estableciendo una conexión entre variables microscópicas (Ω) y macroscópicas (S). En el ejemplo anterior podemos ver que la entropía es cero en el estado de mínima energía, $E = 4$ donde $\Omega = 1 \Rightarrow S = 0$, siendo el único estado accesible $r = (1111)$. En general la entropía es una función creciente de la energía; en nuestro ejemplo lo es hasta alcanzar una energía por partícula $\epsilon \simeq \epsilon_{max}/2$, siendo $\epsilon_{max} = 10$ la energía máxima que pueden alcanzar nuestras partículas. Esta limitación no existe en casos más realistas.

4. Cálculos estadísticos

Sea un sistema con energía total E y $\Omega(E)$ estados accesibles. De estos, sea $\Omega(E, y_j)$ el número de aquellos que cumplen una restricción adicional, $y = y_j$. La probabilidad de encontrar al sistema con $y = y_j$ está dada entonces por $P(y_j) = \Omega(E; y_j)/\Omega(E)$ y el valor promedio de la variable y es:

$$\bar{y} = \frac{1}{\Omega(E)} \sum_j y_j \Omega(E, y_j). \quad (3.9)$$

En la práctica es más conveniente calcular variables termodinámicas a través de la función de partición, definida más adelante a partir de las probabilidades de cada estado. Notamos que para un sistema con energía E y número de estados $\Omega(E)$, al relajar una restricción (por ejemplo, quitar una pared a un gas confinado en un recipiente) el número de estados accesibles aumenta irremediamente: los estados previamente accesibles siguen siendo accesibles y hay nuevos estados accesibles. El aumento en el número de estados al relajar restricciones corresponde con el aumento de la entropía enunciado en la segunda ley de la termodinámica. Si inicialmente teníamos $y_j = y_j^0$ (por ejemplo $V = V_1$) la variable y_j se modifica de forma a maximizar el número de estados accesibles consistentes con el nuevo valor de y_j . El proceso es reversible si $\Omega_{final} = \Omega_{inicial}$ e irreversible si $\Omega_{final} > \Omega_{inicial}$.

3.2.2. Relación entre variables macro y microscópicas

Existe varias relaciones entre variables termodinámicas que se derivan de las leyes de la termodinámica. En particular la primera ley implica²:

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \quad P = -\frac{\partial E}{\partial V}, \quad \mu = \frac{\partial E}{\partial N}. \quad (3.10)$$

El número de estados accesibles es función de E y las variables *extensivas* x , como V y N , es decir $\Omega = \Omega(E, x)$. A partir de 3.8 y la primera ley de la termodinámica, escrita como $d \ln \Omega = \beta dE - \beta \sum X dx$, con $\beta = 1/kT$, podemos inferir las relaciones

$$\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}, \quad X = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x} \Rightarrow P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial V}, \quad \mu = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial N}. \quad (3.11)$$

3.3. Ensemble canónico y el gas ideal clásico

3.3.1. El ensemble canónico

Sea un sistema A con energía total E en contacto y equilibrio termodinámico con un *reservorio de energía* A' , que por definición cumple $E' \gg E$ (figura 3.16). Si el sistema conjunto $A^{(0)} = A + A'$ es cerrado, con energía total $E^{(0)} = E + E'$, entonces la probabilidad de que el sistema A esté en un estado r es:

$$P_r = C \Omega'(E^{(0)} - E_r), \quad (3.12)$$

con C tal que $\sum_r P_r = 1$. Expandemos $\ln \Omega'(E')$ alrededor de $\ln \Omega'(E^0)$,

$$\ln \Omega'(E^0 - E_r) \simeq \ln \Omega'(E^0) - \left[\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \right]_0 E_r. \quad (3.13)$$

El equilibrio termodinámico entre A y A' se establece cuando

$$\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} = \frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \equiv \beta, \quad (3.14)$$

donde por definición β el inverso de la temperatura de A' , igual a la de A en equilibrio. Se tiene entonces que $P_r \propto e^{-\beta E_r}$ y podemos escribir la probabilidad normalizada del estado r como

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}}. \quad (3.15)$$

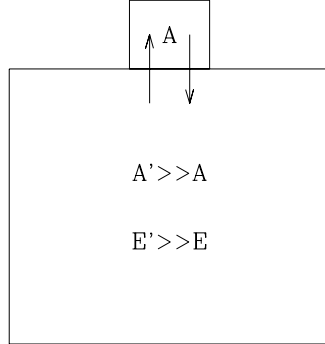


Figura 3.2: Intercambio de energía entre un sistema canónico y su entorno, hasta alcanzar el equilibrio termodinámico.

La función de partición asociada a esta distribución de probabilidad está definida como:

$$Z \equiv \sum_r e^{-\beta E_r}. \quad (3.16)$$

Es posible calcular las variables termodinámicas *intensivas* directamente de $Z = Z(\beta, x)$, ya que la energía de un microestado es función de variables extensivas, $E_r = E_r(x)$, y no de variables intensivas como P y μ , de carácter macroscópico,

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \sum_r (-E_r) e^{-\beta E_r}, \quad \frac{\partial \ln Z}{\partial x} = \frac{1}{Z} \sum_r \left(-\beta \frac{\partial E_r}{\partial x} \right) e^{-\beta E_r} = -\beta X,$$

de donde

$$E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad X = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial x} \rightarrow P = +\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}, \quad \mu = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial N}. \quad (3.17)$$

La expresión 3.17 viene dando la ecuación de estado del sistema. La relación entre la función de partición y la entropía se obtiene identificando³

$$d \ln Z = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \ln Z}{\partial x} dx = -E d\beta - \beta X dx = -E d\beta - \beta(dE - T dS),$$

es decir $d \ln Z = -d(E\beta + S/k)$ resultando en $S = k(\ln Z + \beta E)$.

²en §3.1 se empleó U para designar la energía interna; a partir de §3.2 se emplea E .

³entendiendo que $X dx$ se refiere a $\sum X dx = -PdV + \mu dV + \dots$

3.3.2. Gas ideal clásico

El gas ideal consiste en un conjunto de N partículas libres y la energía del sistema está dada por la suma de las energías cinéticas individuales:

$$E = \sum_{j=1}^N \frac{|\vec{p}_j|^2}{2m}. \quad (3.18)$$

Al hacer $h_0 \rightarrow 0$, la sumatoria sobre estados tiende a una integral sobre los valores de \vec{r} y \vec{p} de cada una de las partículas,

$$Z = \int \exp \left\{ -\frac{\beta}{2m} \sum_j p_j^2 \right\} \frac{d^3 r_j d^3 p_j}{h_0^{3N}}, \quad (3.19)$$

que se convierte en un producto de N integrales idénticas, resultando en la función de partición:

$$Z = V^N \left(\frac{2\pi mkT}{h_0^2} \right)^{3N/2}. \quad (3.20)$$

Al derivar $\ln Z$ con β obtenemos $\bar{E} = 3N/2\beta = (3/2)NkT$, que es la energía total de un gas ideal. La relación 3.17 da la ecuación de estado del gas ideal, $P = (N/V)kT$. Para la entropía del gas ideal clásico obtenemos

$$S = Nk \left[\ln V + \frac{3}{2} \ln T + \sigma \right] \quad \text{con} \quad \sigma = 3/2 \ln \left(\frac{2\pi mk}{h_0^2} e \right). \quad (3.21)$$

Esta expresión tiene dos inconvenientes, uno de los cuales es el no comportarse como una variable extensiva, cuestión identificada mediante la *paradoja de Gibbs*. Supongamos dos sistemas, A y B, donde B duplica al sistema A, es decir $V_B = 2V_A$ y $N_B = 2N_A$. Siendo la entropía una variable extensiva debería cumplirse $S_B = 2S_A$, lo cual no es consistente con (3.21). Gibbs obtuvo la solución a esta paradoja al considerar que el intercambio de partículas microscópicas idénticas no modifica el estado del sistema y dividir la función de partición por el número de permutaciones entre partículas, igual a $N!$, es decir,

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h_0^2} \right)^{3N/2}. \quad (3.22)$$

Usando la aproximación de Stirling, $\ln N! \simeq N \ln N - N$, Gibbs obtuvo

$$S = Nk \left[\ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{3}{2} \ln T + \sigma_s \right], \quad (3.23)$$

donde $\sigma_s = \sigma + 1$. Puede verse rápidamente que esta expresión satisface $S_B = 2S_A$, resolviendo la paradoja de Gibbs.

El problema irresoluble de ambas expresiones es el no cumplir la tercera ley, ya que $S \rightarrow -\infty$ para $T \rightarrow 0$. Como veremos más abajo, el límite de bajas temperaturas debe tratarse como un caso cuántico.

La distribución de Maxwell Boltzmann

Vimos que la probabilidad asociada a un estado r está dada por $P_r \propto e^{-\beta E_r}$. Esta probabilidad se descompone frecuentemente en un producto de términos idénticos, de la forma $e^{-\beta E_i}$ correspondientes a cada partícula. Podemos de ahí definir la función de distribución de momentos, $f(\vec{r}, \vec{p})$, que nos dice cuantas partículas tienen momento alrededor de un valor \vec{p} y posición alrededor de \vec{r} :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f(\vec{p}) = n \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-p^2/2mkT}, \quad (3.24)$$

la cual cumple la condición de normalización $\int f(p) d^3r d^3p = N$. La función de distribución de momentos del gas ideal se conoce como función de distribución de Maxwell-Boltzmann. Es más común definirla en términos de la velocidad \vec{v} de las partículas,

$$f(\vec{v}) d^3v = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv,$$

donde se emplea el hecho de que f solo depende de la magnitud de la velocidad y $d^3v = 4\pi v^2 dv$. La distribución de Maxwell-Boltzmann se puede emplear para cálculos como el de la velocidad promedio de las partículas o para estimar la presión del gas, donde se considera la fuerza que las partículas ejercen sobre un elemento de superficie cuya normal al eje z :

$$P = \int m v_z^2 f(v) d^3v = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle. \quad (3.25)$$

El límite clásico

Un gas ideal puede describirse empleando la mecánica clásica siempre y cuando la ocupación de las celdas de espacio-fase sea baja. Esta condición puede plantearse como

$$[\Delta x]^3 [\Delta p]^3 \ll N \hbar^3,$$

donde $[\Delta x]^3$ y $[\Delta p]^3$ indican el rango de posiciones y momentos ocupados por las N partículas. Claramente $[\Delta x]^3 = V$, mientras que $[\Delta p]^3 \simeq (3mkT)^{3/2}$. La condición para la aplicabilidad de la estadística clásica viene siendo,

$$n^{-2/3}kT \gg \frac{\hbar^2}{3m}, \quad (3.26)$$

con $n = N/V$, la densidad numérica. El régimen cuántico se aplica para temperaturas bajas o densidades altas.

3.4. Ensemble gran canónico: gases cuánticos

3.4.1. Ensemble gran canónico

En el ensemble canónico no se considera el intercambio de partículas entre el sistema A y el reservorio A' . En el ensemble gran canónico el número de partículas en un estado r no es fijo, y se vuelve a considerar la interacción de A con el reservorio A' , con la consideración adicional $N' \gg N$. El sistema (cerrado) compuesto $A^{(0)} = A + A'$ cumple las restricciones:

$$\begin{cases} E^{(0)} = E + E' \\ N^{(0)} = N + N' \end{cases} \quad (3.27)$$

De manera análoga al procedimiento seguido para el ensemble canónico, se obtiene la función de probabilidad del ensemble gran-canónico,

$$P_r \propto \exp\{-\beta(E_r - \mu N_r)\}, \quad (3.28)$$

donde μ es el potencial químico del sistema. La función de partición gran canónico está dada como $Z = \sum_r e^{-\beta(E_r - \mu N_r)}$. Podemos relacionar la energía del sistema y el número de partículas con la ocupación de las celdas de espacio fase:

$$N_r = \sum_j n_j, \quad E_r = \sum_j n_j \varepsilon_j, \quad (3.29)$$

para obtener:

$$P_r \propto \exp\left\{\sum_j -\beta(n_j \varepsilon_j - \mu n_j)\right\} = \prod_j [\exp(-\beta(\varepsilon_j - \mu))]^{n_j}, \quad (3.30)$$

La sumatoria de la exponencial sobre estados $\{r\}$ nos da la función de partición:

$$Z = \sum_r \left(\prod_j w_j^{n_j} \right) = \prod_j \left(\sum_{n_j} w_j^{n_j} \right), \quad (3.31)$$

donde $w_j = \exp\{-\beta(\varepsilon_j - \mu)\}$. La primera igualdad indica que la función de partición es la sumatoria sobre todos los estados r del producto sobre los numeros de ocupación correspondientes a cada estado, definido por un conjunto de números de ocupación $\{n_1^{(r)}, n_2^{(r)}, n_3^{(r)}, \dots\}$. El término de la derecha indica un producto sobre todas las celdas de espacio fase de la sumatoria sobre todos los números de ocupación posibles. Las energías ε_j dependen de la ubicación de la j -ésima celda de espacio-fase pero no de su estado de ocupación (es decir de $n_j^{(r)}$, por tanto de r), lo cual permite permutar el producto y la suma sobre estados. Consideremos un ejemplo simple, el de un sistema con tres microestados posibles representados por tres celdas de espacio fase, $j = \{a, b, c\}$ que pueden ser ocupadas por cero o una partícula ($n_j = 0, 1$), resultando en ocho estados r con distintos valores de E_r y N_r . En este sistema los dos términos de la igualdad (3.31) se escriben como:

$$\begin{aligned} \sum_{r=000}^{111} \left(\prod_{j=0}^1 w_j^{n_j} \right) &= 1 + w_a + w_b + w_c + w_a w_b + w_a w_c + w_b w_c + w_a w_b w_c \\ \prod_{j=a,b,c} \left(\sum_{n_j=0}^1 w_j^{n_j} \right) &= (1 + w_a)(1 + w_b)(1 + w_c), \end{aligned} \quad (3.32)$$

mostrando que se cumple la igualdad en este caso particular. Puede inferirse que la igualdad también se cumplirá si aumentamos el número de celdas o las posibilidades del número de ocupación.

Hay tres casos de particular interés que dan lugar a las tres estadísticas mas comunes:

1. **Bose-Einstein**: partículas son indistinguibles sin restricción en cuanto al número de partículas pueden ocupar una celda de espacio-fase: $n_j = 0, 1, 2, \dots$. Al considerar al espín entre las variables de estado se duplica la posible ocupación del espacio-fase. De aquí se deriva la estadística de un gas de fotones (ver abajo).
2. **Fermi-Dirac**: siguiendo el principio de exclusión de Pauli, cada celda de espacio fase sólo puede ser ocupada por cero o una partícula: $n_j = 0, 1$. Las partículas son indistinguibles y hay que incluir el espín duplicando la posible ocupación del espacio-fase. De este caso se deriva la estadística de un gas degenerado (ver abajo).
3. **Maxwell-Boltzmann**: corresponde al caso clásico de números de ocupación muy pequeños $\Rightarrow \beta(\varepsilon_j - \mu) \gg 1 \Rightarrow w_j \ll 1$, resultando en $\ln Z \approx N \ln \left(\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r} \right)$.

3.4.2. Gas de fotones

En un gas de bosones no hay restricción en cuanto al número de partículas que pueden ocupar un estado dado. La función de partición se obtiene directamente de la sumatoria del lado derecho de la expresión 3.31

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} w_j^{n_j} = \frac{1}{1-w_j} \Rightarrow Z = \prod_j \left\{ \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon_j - \mu)/kT}} \right\}. \quad (3.33)$$

La ocupación de cada celda de espacio fase sale de derivar el número total de bosones de la función de partición:

$$N = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \sum_j \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} - 1} = \sum_j n_j. \quad (3.34)$$

En el caso de un gas de fotones el potencial químico⁴ es nulo ($\mu = 0$) y tenemos una ocupación promedio dada por $\bar{n}_j = (e^{\varepsilon_j/kT} - 1)^{-1}$.

El número de ocupación de celdas del espacio fase y el número de fotones se relacionan a través del número \mathcal{N} de celdas de espacio fase. Este se calcula dividiendo el volumen del espacio fase entre el de cada celda (h), incluyendo un factor de dos por los dos valores posibles de la *helicidad* del fotón

$$d\mathcal{N} = 2 \frac{d^3x d^3p}{h^3} \Rightarrow \frac{d\mathcal{N}}{dV} = 2 \left(\frac{\nu^2}{c^3} \right) d\nu d\Omega, \quad (3.35)$$

empleando $d^3p = p^2 d\Omega dp$ con $p = (h\nu/c)$. La densidad de energía de radiación isotrópica en equilibrio termodinámico, u_ν ($\text{erg cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$), viene dada por la energía de cada estado ($h\nu$), la densidad de estados (ec. 3.35) considerando la isotropía, y la ocupación de cada estado, dando lugar a la función de Planck:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (3.36)$$

3.4.3. Gas ideal de fermiones en degeneración

En este caso un estado dado puede ser ocupado a lo más por una partícula, y la sumatoria sobre ocupaciones es trivial,

$$Z = \prod_j \left\{ 1 + e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)} \right\}. \quad (3.37)$$

⁴la energía “invertida” en la creación del fotón.

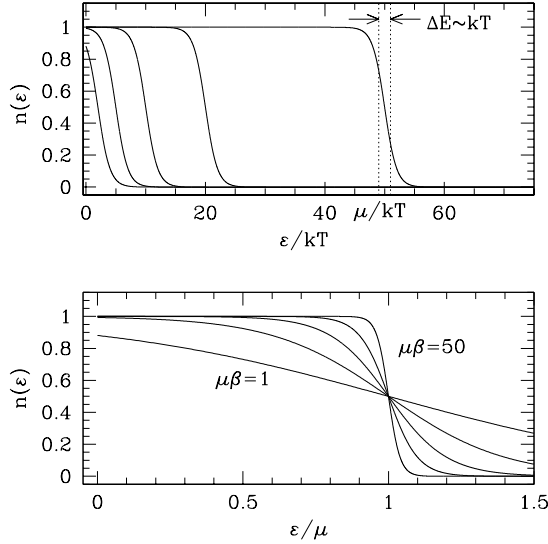


Figura 3.3: *Arriba*: ocupación media de estados \bar{n}_j en un gas de fermiones como función de la energía del estado, para $\mu/kT = 1.0, 5, 10, 20, 50$. La función tiende a un escalón centrado en $\varepsilon = \mu$, de ancho $\Delta E \sim kT$, a medida que μ/kT aumenta, como se ilustra en la figura de *abajo*.

Podemos encontrar el número de fermiones en un estado de energía ε_j , bajo un potencial químico μ :

$$N = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = \sum_j \frac{1}{e^{(\varepsilon_j - \mu)/kT} + 1} = \sum_j n_j, \quad (3.38)$$

es decir $\bar{n}_j = \left\{ e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)} + 1 \right\}^{-1}$, cumpliéndose $0 \leq \bar{n}_j \leq 1$, como corresponde a los fermiones según el principio de exclusión de Pauli. Si $\mu \gg kT$, la distribución del número de ocupación tiende a una función escalón, como se ilustra en la figura 3.3. El límite $T \rightarrow 0$ corresponde al límite de *degeneración*.

Para un gas ideal degenerado podemos identificar el potencial químico con la *energía de Fermi*, $\mu = \varepsilon_f(p_f)$, siendo p_f el momento de Fermi. En el límite $\varepsilon_f/kT \rightarrow \infty$ los estados con energía $\varepsilon < \varepsilon_f$ están ocupados por una partícula mientras que aquellos con $\varepsilon > \varepsilon_f$ están vacíos. La energía cinética se relaciona con el momento de acuerdo a la expresión general $\varepsilon_f = \sqrt{p_f^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$, siendo m la masa de cada partícula; para partículas no relativistas $\varepsilon_f \approx p_f^2/2m$ mientras que en el límite relativista $\varepsilon_f \approx p_f c$.

Gas degenerado

Consideremos primero un gas degenerado de electrones ($m = m_e$), correspondiente a materia contenida en una estrella enanas blancas. Tomando en cuenta que los núcleos son quienes le dan la masa a la estrella, escribimos

la densidad de masa como $\rho = \Gamma n_e m_H$, siendo n_e la densidad de electrones, m_H la unidad de masa atómica y Γ el cociente de nucleones a electrones, el cual tiende a 2 para material procesado (para Fe $\Gamma = 56/26$). El número total de partículas es igual al número de estados contenidos en una esfera de Fermi, multiplicado por el factor de 2 debido al espín,

$$N = 2\mathcal{N} = 2 \int d^3x \int_0^{p_f} \frac{d^3p}{h^3} = \frac{2V}{h^3} \left(\frac{4\pi}{3} p_f^3 \right), \quad (3.39)$$

es decir $n = k_f^3/3\pi^2$, empleando $p_f = \hbar k_f$ como se hace en buen número de textos. Combinando ambas expresiones obtenemos el momento de Fermi en función de la densidad:

$$p_f = \left(\frac{3h^3\rho}{8\pi\Gamma m_H} \right)^{1/3} \iff k_f = \left(\frac{3\pi^2\rho}{\Gamma m_H} \right)^{1/3}. \quad (3.40)$$

Suponiendo un gas ideal no relativista es posible calcular una temperatura de Fermi, por debajo de la cual el gas está en estado de degeneración

$$kT_f = \frac{p_f^2}{2m} \Rightarrow T_f \simeq 2.4 \times 10^9 \text{ K} \left(\frac{\rho}{10^6 \text{ g cm}^{-3}} \right)^{2/3} \left(\frac{\Gamma}{1.4} \right)^{-2/3}. \quad (3.41)$$

La temperatura de Fermi es muy superior a la del interior de una estrella enana blanca.

La densidad de energía, u , y la presión, P , para un gas degenerado están dadas por integrales sobre el espacio de momentos derivadas de las integrales sobre espacio fase:

$$u = \int_0^{p_f} \varepsilon (2h^{-3} d^3p), \quad P = \int_0^{p_f} \frac{1}{3} \vec{p} \cdot \vec{v} (2h^{-3} d^3p). \quad (3.42)$$

Usando la forma de energía cinética de una partícula relativista y la igualdad $\vec{v} = \vec{p}c^2/\varepsilon$, obtenemos las integrales planteadas en el libro de Weinberg:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} \left[\sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} - m_e c^2 \right] 4\pi p^2 dp, \\ P &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} \frac{1}{3} \left[\frac{p^2c^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}} \right] 4\pi p^2 dp. \end{aligned} \quad (3.43)$$

En vez de intentar resolver las integrales exactamente, distinguimos dos casos límites, que son $p_f \ll m_e c^2$ y $p_f \gg m_e c^2$. El primer caso (A) se refiere

al límite no relativista y el segundo (B) al caso relativista. Si las partículas degeneradas son electrones, la transición se da para $p_f = m_e c^2$ que implica

$$\rho = \rho_c \equiv \frac{8\pi (\Gamma m_H) m_e^3 c^3}{3h^3} \simeq 0.97 \times 10^6 \Gamma \text{ g cm}^{-3}. \quad (3.44)$$

Esta es la densidad típica de una estrella enana blanca. Los dos casos son:

(A) **no relativista:** $\Rightarrow \rho \ll \rho_c$:

Equivale a despreciar el término pc frente a $m_e c^2$ en las integrales de las ecs. 3.43, dando $u = 3P/2$, igual que para un gas ideal clásico, y,

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e} \left(\frac{\rho}{\Gamma m_H}\right)^{5/3}. \quad (3.45)$$

$P = K\rho^{5/3}$ es la ecuación de estado de un gas de fermiones no relativista.

(B) **relativista:** $\Rightarrow \rho \gg \rho_c$:

En cuyo caso el término de momento, pc , domina en las integrales de las ecuaciones 3.43, resultando en $u = 3P$, como para un gas de fotones, y la ecuación de estado,

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left(\frac{\rho}{\Gamma m_H}\right)^{4/3}, \quad (3.46)$$

es decir $P \propto \rho^{4/3}$ para un gas degenerado de partículas relativistas.

Estrellas degeneradas

La estructura de una estrella degenerada puede investigarse de manera cualitativa y semi-cuantitativa con un modelo simplificado. Se puede calcular la energía total de la estrella como la suma de la energía interna (térmica) y gravitacional,

$$E_{tot} = \int_0^R u(r) 4\pi r^2 dr - \int_0^R \rho(r) \frac{GM(r)}{r} 4\pi r^2 dr, \quad (3.47)$$

siendo $u = K\rho^\gamma/(\gamma - 1)$ la densidad de energía, R el radio de la estrella y $M(r)$ la masa contenida dentro de un radio r . Un ejemplo relativamente simple es el de una estrella con densidad constante, para la cual encontramos la expresión

$$E(R) = \frac{KM^\gamma}{(\gamma - 1)} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma-1} R^{-3(\gamma-1)} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (3.48)$$

siendo la configuración de equilibrio determinada por la condición de mínima energía, $dE/dR = 0$. Distinguiamos los dos casos:

(A) **no relativista:** $\Rightarrow \rho \ll \rho_c \Rightarrow \gamma = 5/3$:

La configuración de mínima energía se da para

$$R = \frac{5K}{G} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} M^{-1/3} \quad (3.49)$$

resultando en una relación $R \propto M^{-1/3}$ para estrellas degeneradas. Si empleamos la expresión para K obtenemos

$$R = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{4/3} \frac{h^2 M^{-1/3}}{4Gm(\Gamma m_h)^{5/3}} \simeq 7153 \text{ km} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3}.$$

(B) **relativista:** $\Rightarrow \rho \gg \rho_c \Rightarrow \gamma = 4/3$:

El mínimo de energía se da para $dE/dR = 0$ es decir

$$M = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{5K}{G} \right)^{3/2}, \quad (3.50)$$

independientemente del valor de R . Substituyendo el valor de K para $\gamma = 4/3$ se obtiene el límite de masa para una estrella sostenida por degeneración de electrones

$$M = M_{ch} = \frac{3}{2\pi} \frac{(5hc/8G)^{3/2}}{(\Gamma m_h)^2} \simeq 3.42 \times 10^{33} \text{ g} \simeq 1.72 M_\odot. \quad (3.51)$$

Esta viene siendo la masa de Chandrasekhar para una estrella con densidad constante. Si $M = M_{ch}$ tenemos $E = 0$, mientras que si $M < M_{ch}$ tenemos $E > 0$, lo cual corresponde a una estrella fuera de equilibrio donde la presión termodinámica domina a la gravedad y por tanto la estrella está en expansión; si $M > M_{ch}$ entonces $E < 0$, y la estrella está fuera de equilibrio con la gravedad dominando y por tanto en colapso.

El mismo análisis puede hacerse para una estrella de neutrones, reemplazando m_e por $m_N \simeq m_H$ y $\Gamma = 1$. La densidad crítica queda como

$$\rho_c = \frac{m_H^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} \simeq 6.1 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}, \quad (3.52)$$

obteniéndose para el caso no relativista

$$R = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2 M^{-1/3}}{4Gm_N^{8/3}} \simeq 4.9 \text{ km } (M/M_\odot)^{-1/3}, \quad (3.53)$$

y una masa límite

$$M_{ns} = \frac{3(5hc/8G)^{3/2}}{2\pi m_h^2} \simeq 6.9 M_\odot. \quad (3.54)$$

El radio de la estrella queda subestimado con respecto a un análisis más riguroso, en particular porque hemos despreciado la interacción entre partículas. Los valores actualmente aceptados como típicos para una estrella de neutrones son $M_* \simeq 1.44 M_\odot$ y $R_* \simeq 10 \text{ km}$. Para una discusión detallada ver el libro de Weinberg (1973).

3.5. Reacciones en equilibrio

La mecánica estadística trata también problemas de la creación de un tipo de partículas mediante la destrucción de otras. Este proceso de destrucción y creación puede darse en un estado de equilibrio entre reacciones de algún tipo balanceadas por la reacción inversa, por ejemplo:

- reacciones químicas, como la ionización del hidrógeno y el proceso de recombinación: $\text{H} \longleftrightarrow \text{H}^+ + e^-$;
- interacciones electrodinámicas, como la producción de pares y su aniquilación: $\gamma + \gamma \longleftrightarrow e^+ + e^-$;
- reacciones nucleares, como la fusión de dos núcleos de helio en un núcleo de berilio y el decaimiento del berilio: ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \longleftrightarrow {}^8\text{Be}$.

Cuando se tiene un equilibrio entre una reacción y su inversa se establece una relación entre las funciones de partición de las partículas involucradas que permite establecer relaciones entre las densidades de las distintas especies.

3.5.1. La ley de acción de masas

La ley de acción de masas permite derivar las relaciones entre densidades de especies en reacciones en equilibrio. Para deducirla regresamos a un ensemble canónico de partículas clásicas pero indistinguibles, donde la función

de partición de m especies de partículas puede escribirse de la forma,

$$Z = \prod_{j=1}^m Z_j = \prod_{j=1}^m \frac{\zeta_j^{N_j}}{N_j!} \quad (3.55)$$

con $\zeta = V(2\pi mkT/h_0^2)^{3/2}$ en el caso particular de un gas ideal. El potencial químico de la especie j se calcula directamente de la función de partición:

$$\mu_j = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial N_j} \approx -kT \ln \left(\frac{\zeta_j}{N_j} \right), \quad (3.56)$$

siendo la aproximación adecuada para $N_j \gg 1$. Por otro lado, el equilibrio entre especies en reacción (equilibrio químico) se da cuando $\sum \mu_j N_j$ es mínima⁵, que equivale a minimizar $\prod [\zeta_j/N_j]^{N_j}$. Uno puede escribir esta condición como:

$$\prod_{j=1}^m [\zeta_j/n_j V]^{\nu_j} = \prod_{\ell=1}^{m'} [\zeta'_\ell/n'_\ell V]^{\nu'_\ell}, \quad (3.57)$$

para una reacción de tipo $A + B + C \leftrightarrow A' + B' + C'$ siendo $\{\zeta_j/V, n_j, \nu_j\}$ las funciones de partición individuales por unidad de volumen, las densidades y el número de partículas por reacción del lado izquierdo de la reacción y $\{\zeta'_\ell/V, n'_\ell, \nu'_\ell\}$ las mismas cantidades para las especies del lado derecho. Nótese que la función de partición individual se divide por el volumen, eliminando la dependencia de la relación 3.57 con V . Hay varios ejemplos astrofísicos importantes como la ley de Boltzmann, la ecuación de Saha, el balance entre reacciones nucleares, el cociente de neutrones a protones en una estrella de neutrones, etcétera. A continuación vemos dos de ellos.

3.5.2. Ley de Boltzmann

Pensando en el equilibrio entre el número de átomos en un estado n_1 y otro estado n_2 , podemos escribir la reacción como $(1) \rightleftharpoons (2)$, de donde la ley de acción de masas (ec. 3.57) da:

$$n_2/n_1 = \zeta_2/\zeta_1. \quad (3.58)$$

El potencial químico para un fotón es cero y por tanto podemos despreciarlos en estas expresiones. Para un sistema cuántico $\zeta_j = g_j e^{-E_j/kT}$, con g_j el

⁵La condición termodinámica correspondiente es la minimización de la energía libre de Helmholtz, $F = -kT \ln Z$.

número de estados de energía E_j (estados degenerados de misma energía), por lo que obtenemos la ley de Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{(E_1 - E_2)/kT}. \quad (3.59)$$

Para un sistema con un número arbitrario de niveles tenemos:

$$\frac{n_j}{n} = \frac{g_j e^{-E_j/kT}}{\sum_{\ell} g_{\ell} e^{-E_{\ell}/kT}}. \quad (3.60)$$

En la práctica el rápido aumento de la degeneración g con el número de estados eventualmente se ve compensado por el término exponencial y uno puede realizar el cálculo considerando un número finito de estados.

Como ejemplo, los estados rotacionales de la molécula de CO se distribuyen de acuerdo a $E_j = j(j+1)B$ con $B = \hbar^2/2I$, siendo I el momento de inercia de la molécula ($j = 0, 1, \dots$) y $B \simeq 2.77$ K para el CO. Los estados rotacionales están dados en términos de los armónicos esféricos y para un número cuántico j la degeneración viene dada por los valores posibles del número cuántico magnético $m \leq |j|$, es decir $g_j = 2j + 1$, y

$$\frac{n_j}{n} = \frac{(2j+1) \exp\{-j(j+1)B/kT\}}{1 + 3e^{-\beta B} + 5e^{-2\beta B} + 7e^{-6\beta B} + 9e^{-12\beta B} + 11e^{-20\beta B} + \dots}.$$

3.5.3. Ecuación de Saha

Para procesos como la ionización y recombinación del hidrógeno,



donde el número entre paréntesis denota el grado de ionización, la ley de acción de masas queda como:

$$\frac{\zeta_0/V}{n_0} = \frac{\zeta_1/V \zeta_e/V}{n_1 n_e}. \quad (3.62)$$

Tanto el electrón como el protón ($H(1)$) son partículas libres, por lo que la ley de acción de masas, al considerar las distintas funciones de partición, da:

$$\zeta_e/V = 2/\lambda_e^3, \quad \zeta_1/V = 2/\lambda_p^3, \quad \zeta_0/V = (g_0/\lambda_T^3) e^{\chi/kT}, \quad (3.63)$$

donde $\lambda_e \equiv h/\sqrt{2\pi m_e kT} = h/p$, es la longitud de onda de Broglie para un electrón térmico, $\lambda_p \equiv h/\sqrt{2\pi m_p kT}$ para un ion, y $\chi > 0$ es el potencial

de ionización del átomo considerado⁶. Los factores de 2 vienen de los dos estados de espín posibles para el electrón y el protón. En estos términos obtenemos:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{2}{n_e \lambda_e^3} \left(\frac{2}{g_0} \right) e^{-\chi/kT}. \quad (3.64)$$

Electrones no degenerados tienen una ocupación $\Delta x \Delta p \gg h$, por lo que $n_e \lambda_e^3 \ll 1$. De hecho la densidad es generalmente varios órdenes de magnitud menor a λ_e^{-3} , por lo que es común expresar este término mediante una exponencial, $n_e \lambda_e^3 / 2 = e^{-\xi}$, con ξ típicamente entre 10 y 30. La ec. 3.64 puede generalizarse a otros estados de ionización $i \neq 0$ y reescribirse como:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{g_{i+1}}{g_i} e^{\xi - \chi_i/kT}, \quad (3.65)$$

donde g_{i+1} es el número de estados para la especie ionizada debidos al espín y g_i es el número de estados de la especie no-ionizada.

Para que haya un grado de ionización apreciable se requiere que el término en la exponencial no sea significativamente mayor que uno, lo cual sucede para $kT \lesssim \chi_i/\xi$, correspondiente a temperaturas mas de un orden de magnitud por debajo de χ_i/k . La dificultad en ionizar un átomo es compensada con creces por la vastedad del espacio fase disponible para el electrón libre. Como resultado, mientras que el potencial de ionización del hidrógeno corresponde a $13.6 \text{ eV}/k \approx 158,000 \text{ K}$, es en las estrellas de tipo A, donde $T_e \approx 10,000 \text{ K}$ y $\xi \approx 15$, donde la secuencia de Balmer es mas pronunciada. La ecuación de Saha es básica para obtener la relación entre la intensidad de las líneas espectrales y la temperatura, correspondiendo a la relación entre tipo espectral y temperatura (fig 3.4).

⁶la energía del estado ligado es $E = -\chi$ y el término de partición es $e^{-E/kT} = e^{\chi/kT}$

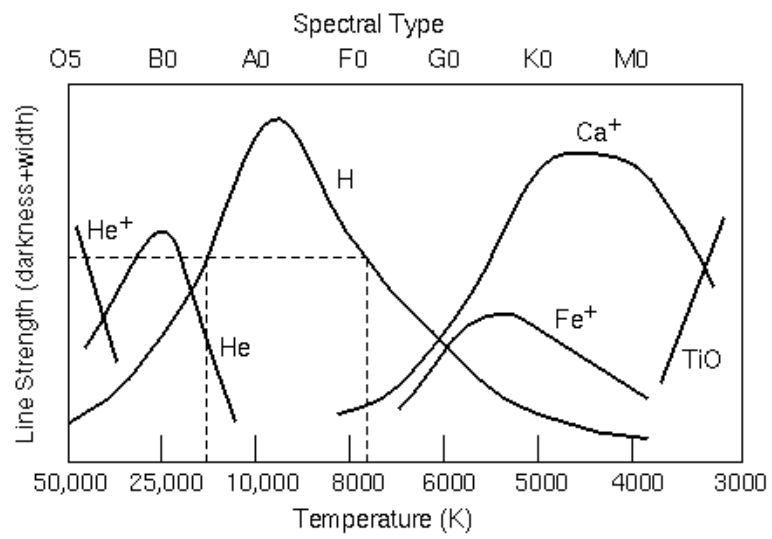


Figura 3.4: Intensidad de las principales líneas espectrales en función de la temperatura. La secuencia de tipos espectrales se define a partir de las intensidades de las distintas líneas y por tanto la relación entre intensidad de líneas y temperatura define la secuencia espectral como una secuencia de temperaturas.