INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

ALGEBRA LINEAL

HOJA 3: APLICACIONES LINEALES

1. Sea f: $R^4 \to R^3$ el homomorfismo definido por $f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$ Determinar el núcleo y la imagen.

2. Sea f: $R^2 \to R^3$ el homomorfismo definido por $f(x, y) = (y, x, x - y)$. Determinar su matriz coordenada respecto de las bases {(1, 1), (1, 0)} y {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)}

3. Sea f: $R^4 \to R^3$ el homomorfismo definido por $f(a, b, c, d) = (a, a + b + c, 0)$. *a)* Demostrar que es lineal y calcular su matriz respecto de las bases canónicas. *b)* Obtener el núcleo y la imagen. *c)* Obtener la matriz de f respecto de las bases {(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)} y {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)}.

4. Sea f el homomorfismo entre dos espacios vectoriales representado por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de a para que f sea inyectivo, y obtener si existe algún valor de a para el cual f es sobreyectivo.

5. Sea f: $R^2 \to R^4$ el homomorfismo determinado por $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$, $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Hallar la matriz coordenada respecto de las bases canónicas y los subespacios núcleo e imagen.

6. En R^3 se considera la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y el homomorfismo $f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = (x_2 + x_3)\,\mathbf{e}_1 + (x_1 + x_3)\,\mathbf{e}_2 + (x_2 - x_1)\,\mathbf{e}_3$. Hallar:
a) Expresión analítica de f respecto de la base dada.
b) Vectores invariantes de f.
c) Núcleo e imagen.
d) Ampliar la base del núcleo a una base de R3.
e) Expresión analítica de f respecto de la base del apartado anterior.

7. Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ base de V y el endomorfismo $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$. Hallar:
a) Expresión matricial de f respecto de la base B.
b) Vectores invariantes de la aplicación.
c) Núcleo e imagen de f.

8. Se considera el homomorfismo f: $R^3 \to R^2$ definido por $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 0, -1) = (1, 1)$, $f(2, 1, 1) = (1, 0)$. Hallar:
a) Matriz coordenada respecto de las bases canónicas.
b) Matriz coordenada respecto de las bases {(1, 0, 1), (0, 0, –1), (2, 1, 1)} y {(0, 1), (1, 0)}.
c) Núcleo e imagen de la aplicación.

9. Sea f: $R^4 \to R^2$ el homomorfismo cuya matriz coordenada respecto de las bases canónicas es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea W el subespacio de R^2 determinado por $x_1 - x_2 = 0$. Encontrar el subespacio imagen de W en R^4 definido por la aplicación f^{-1}.

10. Sea f: $R^4 \to R^3$ el homomorfismo cuya matriz coordenada respecto de dos bases B y B' de los espacios inicial y final respectivamente es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

y sea W el subespacio de R^4 definido por las ecuaciones $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_3 - x_4 = 0$. Encontrar el subespacio imagen de W por f respecto de la base B'.

11. Sea f: $R^3 \to R^3$ el endomorfismo dado por $f(x, y, z) = (-x + y + 2z, -z, 3y)$. Hallar las ecuaciones de f respecto de de la base $\{(-1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 2, -1)\}$, y obtener en esta base las coordenadas del vector $f(-3, -1, 1)$.

12. Dada la aplicación lineal f de R^4 en R^3 tal que $f(x, y, z, t) = (0, y, t)$, hallar los subespacios núcleo e imagen.

13. Siendo V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K de escalares, y cuyas bases respectivas son $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$, obtener la expresión matricial con respecto a dichas bases de la aplicación lineal f cuando ésta viene definida en la forma:
a) $f(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4$
b) $f(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_4$
c) $f(3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$

14. Sea la aplicación lineal f de R^4 en R^3 dada por $f(x, y, z, t) = (x + z, y, y)$. Se pide:
a) Hallar las imágenes de la base canónica de R^4.
b) Matriz coordenada de f en las bases canónicas de ambos subespacios.
c) Bases de los subespacios núcleo e imagen de f.
d) Razonar si f es inyectiva, sobreyectiva o si se trata de un isomorfismo.

15. Demostrar que la aplicación $f(x, y, z) = (x, -y, z)$ es un automorfismo en R^3.

16. Dada la aplicación lineal f de R^3 en R^2 dada por $f(x, y, z) = (x, y - z)$, hallar el núcleo y la imagen, así como la expresión matricial de la aplicación con respecto a las bases canónicas.

17. Sea la aplicación f: $V \to W$ definida por las condiciones: $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 - 4\mathbf{w}_3$, siendo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ base de V y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ base de W. Determinar la expresión coordenada de f y los subespacios núcleo e imagen.

18. Calcular la matriz y los subespacios núcleo e imagen de la aplicación de R^3 en R^4 definida por la siguiente función: $f(x, y, z) = (x, y, z - x, y)$.

19. Dada la aplicación lineal de R^3 en R^4 definida por las relaciones: $f(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0)$; $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1, 0)$; $f(1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1)$, hallar la matriz del homomorfismo, el núcleo y la imagen dando una base de cada uno de los subespacios encontrados.

20. Encontrar la aplicación lineal que proyecta todo el espacio R^3 sobre el subespacio generado por los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$. Definir el núcleo de dicha aplicación.

21. Sea la aplicación f de R^3 en R^4 tal que las imágenes de la base canónica de R^3 son respectivamente las siguientes $(1, 0, 0) \to (1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0) \to (1, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1) \to (0, 1, 0, 1)$. Calcular la expresión matricial de f, el núcleo y la imagen, así como la matriz coordenada de f respecto de las nuevas bases $\{(1, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $\{(1, -1, 0, -2), (-2, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 1)\}$. Encontrar la imagen del vector $(1, 3, 1)$, definido en la base canónica, referida a la nueva base de R^4.

22. Encontrar la definición matricial con respecto a las base canónica, del endomorfismo definido en R^3 respecto a la base $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 2)\}$ por la expresión $f(x, y, z) = (x, z - y, x)$. Hallar las coordenadas en la base canónica de la imagen del vector (1, 2, 1) definido en la base B.

23 Sea el endomorfismo **T**, definido en R^4 de la forma $\mathbf{T}(x, y, z, t) = (x + z, y, y, 0)$. Se pide:
a) Hallar las imágenes de la base canónica.
b) Matriz de **T** en la base canónica.
c) Bases de los conjuntos núcleo e imagen de **T**.

24. Obtener la condición que deben cumplir los elementos de un endomorfismo cuya matriz es triangular superior para que sea un automorfismo en el espacio lineal real n-dimensional.

25. Sea el vector $\mathbf{v}$ (1, 2, –3) referenciado en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ del espacio lineal R^3, y sea otra base $\{\mathbf{e}_i\}$ de dicho espacio definida por los vectores: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$. Considerando el endomorfismo:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) Subespacios núcleo e imagen de **T**. Dimensión del núcleo y rango de **T**.
b) Vector **w** transformado de **v** por **T**.
c) Expresiones **v**' y **w**' de los vectores **v** y **w** en la base $\{\mathbf{e}_i\}$.
d) Nueva expresión **T**' del operador en la base $\{\mathbf{e}_i\}$.
e) Subespacios núcleo e imagen de **T**'. Dimensión del núcleo y rango de **T**'.
f) Vector **w**' transformado de **v**' por **T**'.

26. Encontrar la matriz de cada uno de los siguientes endomorfismos definidos en R^3:
a) Aquél que mantiene invariable tras su acción los puntos de la parábola $y^2 = 2x$.
b) Aquél que proyecta todo el espacio sobre la recta $\{x = z, y = 0\}$, y es tal que multiplica por 4 los módulos de los vectores con dicha dirección.

27. En la base $\{1, z, z^2\}$ del espacio de los polinomios de segundo grado con coeficientes en R, el endomorfismo **T** se determina por la matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de **T** en la nueva base: $\{3z^2 + 2z, 5z^2 + 3z + 1, 7z^2 + 5z + 3\}$.