

Examen de Matemáticas 4º de ESO
Junio 2004

Problema 1 (2 puntos) Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 14}}{x - 5}$$

Solución:

Como no existen raíces cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7) \geq 0$:

	$(-\infty, -7)$	$(-7, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 7$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$x^2 + 5x - 14$	+	-	+

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -7] \cup [2, 5) \cup (5, +\infty)$$

Problema 2 (1 puntos) Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 1}$

3. $h(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \implies$ impar

2. $g(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 1}{(-x)^3 - (-x)^2 - 1} = -\frac{x^2 - x - 1}{x^3 + x^2 + 1} \implies$ ni par ni impar

3. $h(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2 - 1} = h(x) \implies$ par

Problema 3 (1 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 2x + 1)$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4 + x - 2)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 2x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^5 - x}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 2x + 1) = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4 + x - 2) = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 2x - 1} = \frac{2}{5}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 2x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 4} = -\infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{2x^5 - x} = 0$$

Problema 4 (3 punto) Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - 3}{3x^3} \right)^{2x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^5 - x + 1} \right)^{x^3 + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^7 - x^3 - 1}{5x^7 + 2x^3 - 1} \right)^{x+1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x + 1}{x^3 + 2} \right)^{x^2 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^4 + x^3 - x^2 + 1}{3x^4 - x^2 + 1} \right)^{7x-1}$$

Solución:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 - 3}{3x^3} \right)^{2x^3} = e^{-2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^5 - x + 1} \right)^{x^3+1} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^7 - x^3 - 1}{5x^7 + 2x^3 - 1} \right)^{x+1} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 - x} \right)^{x-1} = e$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + x^2 - x^2 + 1}{2x^5 + x^2 + 1} \right)^{7x-1} = +\infty$

Problema 5 (2 punto) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{x + 20}}{x - 5}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3} = \frac{30}{13}$
2. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{x + 20}}{x - 5} = -\frac{1}{10}$

Problema 6 (1 punto) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1. Dibujar la gráfica de la función.
2. Estudiar la continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Se dan valores y a continuación se dibuja.
2. En $x = 1$ es continua, mientras que en $x = 3$ la discontinuidad es inevitable, hay un salto.