

Examen de Matemáticas 4º de ESO
Mayo 2004

Problema 1 (2 puntos) Calcular el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}{x - 6}$$

Solución:

Como no existen raíces cuadradas de números negativos, calculamos los intervalos en los que $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) \geq 0$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+
$x^2 - 4x - 5$	+	-	+

Si ahora quitamos el punto que anula el denominador nos queda:

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -1] \cup [5, 6) \cup (6, +\infty)$$

Problema 2 (1 puntos) Comprobar la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

2. $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

Solución:

1. $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = -f(x) \implies$ impar

2. $g(-x) = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2} = \frac{-x^3 - 1}{x^2} \implies$ ni par ni impar

Problema 3 (1 puntos) Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo

$$f(x) = \frac{x - 1}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{(\sqrt{x^2 - 1}) - 1}{2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x - 1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{2}$$

Problema 4 (1 punto) Calcular la función inversa de $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Solución:

$$y = \frac{3x+2}{x+1}; \quad yx + y = 3x + 2; \quad yx - 3x = -y + 2; \quad (y-3)x = -y + 2 \implies$$

$$x = \frac{-y+2}{y-3} \implies f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x-3}$$

Problema 5 (1 puntos) Comprobar si la función $f(x) = 3^x$ es creciente o decreciente en $x = 2$

Solución:

$$1,9 < 1,99 < 2 < 2,09 < 2,1$$

$$8,0636 < 8,9016 < 9 < 9,935 < 10,045$$

Luego la función es creciente en $x = 2$.

Problema 6 (1 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - x + 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + x + 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^2 + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2x - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 - x + 1) = \infty$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^3 + x + 1) = -\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2x - 1} = -\infty$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 2} = 0$

Problema 7 (3 puntos) Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{2x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1} \right)^{2x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x^2 + x - 1} \right)^{x^2+1}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{4x-1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2-1}$

Solución:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^{2x^2} = e^{-6}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 1} \right)^{2x} = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{3x^2 + x - 1} \right)^{x^2+1} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{4x-1} = e^{-8}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 + 2x + 1}{x^5 - 1} \right)^{x^2-1} = +\infty$