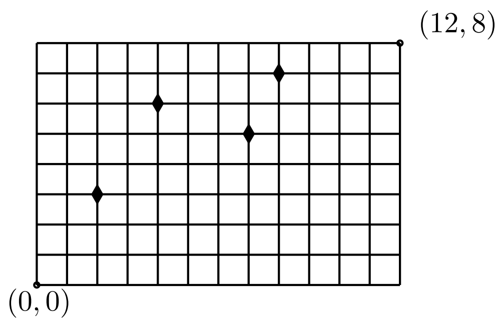
# Solución del II Examen de Matemáticas Discreta

1. Una secretaria trabaja en un edificio ubicado 12 cuadras al este y 8 cuadras al norte de su casa. Todos los días ella camina 20 cuadras para ir a trabajar. Si ella no pasa por las esquinas marcadas en el plano ¿Cuantas rutas distintas hay de su casa al trabajo? 4 ptos.




**Solución.** Sean $P_1(2,3),\ P_2(4,6),\ P_3(7,5),\ P_4(8,7)$ las coordenadas de los puntos que indican las esquinas por las cuales no hay paso. Procedemos a contar los caminos crecientes que pasan por lo menos por uno de esos puntos y estos son los caminos no permitidos; al total de caminos le restamos este número y el resultado es el número de caminos permitidos. Para contar los caminos prohibidos usamos el principio de inclusión-exclusión. Definimos los conjuntos
$A_1 = \{$ los caminos que pasan por el punto $P_1\}$
$A_2 = \{$ los caminos que pasan por el punto $P_2\}$
$A_3 = \{$ los caminos que pasan por el punto $P_3\}$
$A_4 = \{$ los caminos que pasan por el punto $P_4\}$
El conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ son los caminos que pasan por al menos uno de los puntos vedados, el número de elementos de este conjunto es el número de caminos prohibidos.
El principio de inclusión-exclusión nos asegura

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =& |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

Procedemos a calcular el cardinal de cada uno de los conjuntos:
usando el principio de la multiplicación obtenemos $|A_1| = \binom{5}{2}\binom{15}{5}$ , cada camino desde $(0,0)$ hasta $(12,8)$ que pasa por $P_1(2,3)$ se puede ver como par de caminos, uno que va desde $(0,0)$ hasta $(2,3)$ y otro que va desde $(2,3)$ hasta $(12,8)$. La intersección de tres de esos conjuntos

indica los caminos que pasan por (todos) los tres puntos correspondientes. Como no hay caminos crecientes que pasen por $P_1$ y $P_3$ se tiene que $A_2 \cap A_3 = \emptyset$. De esta manera podemos calcular los cardinales:

$$
\begin{aligned}
|A_1| &= \binom{5}{2}\binom{15}{5} = 30030,\\
|A_2| &= \binom{10}{4}\binom{10}{2} = 9450,\\
|A_3| &= \binom{12}{5}\binom{8}{3} = 44352,\\
|A_4| &= \binom{15}{7}\binom{5}{1} = 32175,\\
|A_1 \cap A_2| &= \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{10}{2} = 4500,\\
|A_1 \cap A_3| &= \binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{8}{3} = 11760,\\
|A_1 \cap A_4| &= \binom{5}{2}\binom{10}{4}\binom{5}{1} = 10500,\\
|A_2 \cap A_3| &= 0\\
|A_2 \cap A_4| &= \binom{10}{4}\binom{5}{1}\binom{5}{1} = 5250,\\
|A_3 \cap A_4| &= \binom{12}{5}\binom{3}{1}\binom{5}{1} = 11880,\\
|A_1 \cap A_2 \cap A_4| &= \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{1}\binom{5}{1} = 2500,\\
|A_1 \cap A_3 \cap A_4| &= \binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{3}{1}\binom{5}{1} = 3150
\end{aligned}
$$

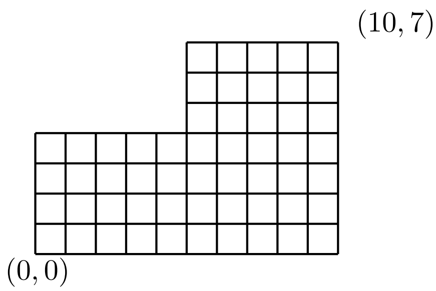
Las demás intersecciones son vacías.
Luego

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =& 30030 + 9450 + 44352 + 32175\\
&- (4500 + 11760 + 10500 + 5250 + 11880)\\
&+ 2500 + 3150 = 77767
\end{aligned}
$$

Este es el número de caminos no permitidos.
Para hallar el número de caminos permitidos calculamos el número total de caminos y le restamos el número de caminos vedados. De este modo el número de caminos permitidos es:

$$\binom{20}{8} - 77767 = 48203$$

2. Hallar el número de caminos ascendentes desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(10,7)$ en el siguiente diagrama




**Solución.** Dividimos el conjunto de caminos en subconjuntos disjuntos de esta manera. Todo camino pasa por exactamente uno de los siguientes puntos $P_1(5,4),\ P_2(6,3),\ P_3(7,2),\ P_4(8,1)$ y $P_5(9,0)$. Esto es debido a que los caminos son crecientes (no se permiten pasos descendentes o a la izquierda; de este modo no hay caminos que pasen por dos de esos puntos indicados. Además cualquier camino pasa por uno de esos puntos, por lo tanto si definimos:
$A_i$ el conjunto de caminos que pasan por $P_i$ para $i = 1,2,3,4,5$ tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{5} A_i$$

es el conjunto de los caminos que queremos contar. Puesto que los conjuntos son disjuntos se tiene que

$$|\bigcup_{i=1}^{5} A_i| = \sum_{i=1}^{5} |A_i|$$

Calculamos $|A_i|$ del mismo modo que en el problema anterior

$$|A_1| = \binom{9}{4}\binom{8}{3} = 7056$$
$$|A_2| = \binom{9}{3}\binom{8}{4} = 5880$$
$$|A_3| = \binom{9}{2}\binom{8}{3} = 2016$$
$$|A_4| = \binom{9}{1}\binom{8}{2} = 252$$
$$|A_5| = \binom{9}{0}\binom{8}{1} = 8$$

El total de caminos es

$$15212$$

3. Hay 5 libros de Historia, 4 de Ciencias y 3 de Literatura (todos distintos) ¿De cuantas maneras se pueden ordenar 6 libros en un estante si no hay libros de Ciencias uno al lado del otro?
**Solución.** Definimos los conjuntos
$A_ik$ es el conjunto de los ordenamientos tales que los libros en la posición $k$ y $k+1$ son de Ciencias para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Entonces

$$\bigcup_{k=1}^{5} A_k$$

es el conjunto de todos los arreglos en fila de 6 libros con la condición de que al menos hay dos de Ciencias adyacentes (uno al lado de otro). El complemento de este conjunto respecto a todos los ordenamientos posibles de 6 libros, es el conjunto al cual queremos calcular su cardinal. Usando el principio de inclusión-exclusión se tiene

$$\begin{aligned} |\bigcup_{k=1}^{5} A_k| = & \sum_{k=1}^{5} |A_k| - \sum_{1\leq i<j\leq\ 5} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq\ 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ & - \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3<i_4\leq\ 5} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \end{aligned}$$

$|A_1|$ se calcula de la siguiente manera: se eligen dos libros de Ciencias y se colocan en el primer y segundo lugar y en los otros lugares colocamos 4 libros de los restantes, de este modo se tiene que $|A_1| = \binom{4}{2}2\binom{10}{4}4! = 60480$. $A_2$ se calcula de la misma manera. Así

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = A_4| = |A_5| = 60480$$

$A_1 \cap A_2$ es el conjunto de los arreglos con la condición tres libros de Ciencias se encuentran en los tres primeros lugares, es decir hay tres libros de Ciencias consecutivos (al menos), pero este número es igual a si los tres libros de Ciencias ocupen los lugares 2,3 y 4 o 3,4 y 5 etc. Por lo tanto

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4| = |A_4 \cap A_5| = \binom{4}{3}3!\binom{9}{3}3! = 12096$$

Ahora bien $A_1 \cap A_3$ es el conjunto de arreglos tales que las posiciones 1,2,3 y 4 son ocupadas por libros de Ciencias y el número de arreglos es

$$4!\binom{8}{2}2! = 1344$$

Este es el número de arreglos en los conjuntos $A_1 \cap A_4,\ A_1 \cap A_5,\ A_2 \cap A_4,\ A_2 \cap A_5$ y $A_3 \cap A_5$ puesto que en todos ellos se usan 4 libros de Ciencias.
Por otro lado $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3$, es decir, la intersección de tres consecutivos es el mismo conjunto que se obtiene de la intersección de los extremos. De este modo, en la fórmula para

calcular el total, el cardinal de las intersecciones dos a dos $|A_1 \cap A_3|$, $|A_2 \cap A_4|$, $|A_3 \cap A_5|$ se cancelan con los cardinales de las intersecciones tres a tres consecutivas. Por otro lado las intersecciones tres a tres de conjuntos no consecutivos es vacía, pues se tiene que usar 5 libros de Ciencias y sólo hay 4. Por ejemplo $A_1 \cap A_2 \cap A_4$ es el conjunto de arreglos que tienen libros de Ciencia en las posiciones 1,2,3,4 y 5. Por la misma razón las intersecciones cuatro a cuatro y de los cinco conjuntos es vacía.
Tenemos entonces

$$\begin{aligned}|\bigcup_{k=1}^{5} A_k| =& \sum_{k=1}^{5} |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| \\ & - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_4 \cap A_5| \\ =& 5 \cdot 60480 - 4 \cdot 12096 - 3 \cdot 1344 = 249984\end{aligned}$$

Este es el número de arreglos en los cuales hay al menos dos libros de Ciencias adyacentes. El cardinal del complemento es

$$\binom{12}{6} 6! - 249984 = 415296$$

Este es el número de maneras de ordenar 6 libros de los dados tales que no hay libros de Ciencias uno al lado de otro.

**Segunda Solución.** Puesto que no son muchos los casos podemos contarlos de una manera directa:
**Caso 1** Los arreglos donde no hay libros de Ciencias. Hay $\binom{8}{6} \cdot 6! = 20160$ arreglos; se eligen 6 de los libros restantes y se ordenan den todas las maneras posibles.
**Caso 2** Hay exactamente un libro de Ciencias. Hay $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5} \cdot 5! = 161280$; se elige un libro de Ciencias y 5 de las otras materias y se ordenan.
**Caso 3** Hay exactamente dos libros de Ciencias. Empecemos con una fila de 6 lugares donde colocaremos los libros:

— — — — — —

Los casos permitidos son aquellos donde los dos libros de Ciencias no están uno al lado del otro y son estos casos:

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

Luego hay $10 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{8}{4} \cdot 4! = 201600$ arreglos en este caso; 10 son las diferentes posiciones que ocupan los dos libros de Ciencias, $\binom{4}{2} \cdot 2$ cuenta las maneras de ordenar dos de los cuatro libros de Ciencias en cada caso y $\binom{8}{4} \cdot 4!$ nos da el numero de arreglos de cuatro libros de los 8 restantes en los cuatro lugares disponibles.

**Caso 4**. Hay exactamente tres libros de Ciencias. Determinamos las maneras lícitas de ubicar los tres libros de Ciencias en los seis lugares:

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}$$

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

$$\underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

$$\underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}\ \underline{\quad}\ \underline{C}$$

Hay cuatro casos posibles; luego se tienen $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 3! \cdot \binom{8}{3} 3! = 32256$ arreglos cuando hay tres libros de Ciencias; 4 son los distintos casos, $\binom{4}{3} \cdot 3!$ cuenta la selección y ordenamiento de tres libros de Ciencias y $\binom{8}{3} \cdot 3!$ es el número de arreglos de los tres libros restantes.

No es posible colocar los cuatro libros de Ciencias en los seis lugares sin evitar que hayan dos de ellos adyacentes.

Los casos son disjuntos, y la unión de los arreglos de todos los casos es el conjunto al cual queremos calcular su número. Por lo tanto, la cantidad de maneras de ordenar seis libros de los dados tal que no hay libros de Ciencias adyacentes es

$$20160 + 161280 + 201600 + 32256 = 415296$$

4. Determine el número de permutaciones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en las cuales hay exactamente 3 enteros en sus posiciones naturales.

**Solución.** Si hay exactamente tres en sus posiciones naturales los otros cuatro deben ocupar posiciones distintas a las naturales. Calculemos inicialmente el número de permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que ningún número ocupe su posición natural. Esto es lo que se denomina desarreglos. Usamos el principio de inclusión exclusión para contar las permutaciones en las cuales hay por lo menos un número en su posición natural. Definimos los conjuntos
$A_1$ las permutaciones que tienen al número 1 en la posición 1 (su posición natural).
$A_2$ las permutaciones que tienen al 2 en la posición 2.
$A_3$ las permutaciones que tienen al 3 en la posición 3.
$A_4$ las permutaciones que tienen al 4 en la posición 4.
$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 3!$ pues son las permutaciones de tres elementos (hay uno fijo de los cuatro). $|A_i \cap A_j| = 2$ para $i \neq j$ puesto que hay dos fijos de los cuatro. La intersección tres a tres y de los cuatro tienen cardinal 1, pues al fijar tres de ellos el restante esta determinado. De este modo

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \cdot 3! - 6 \cdot 2 + 4 - 1 = 15$$

Por lo tanto el número de desarreglos para cuatro números es

$$D_4 = 4! - 15 = 9$$

Para encontrar el número de permutaciones de [7] con exactamente 3 números en su posición natural aplicamos el principio de multiplicación de este modo. Elegimos tres de los siete números y los fijamos y contamos los desarreglos de los cuatro restantes que es $D_4$. De este modo el resultado es

$$\binom{7}{3} \cdot D_4 = 35 \cdot 9 = 315$$

5. Pruebe que en cualquier conjunto de 9 enteros distintos existen dos cuya suma o diferencia es divisible por 15.

**Solución.** Usamos el principio de las casillas. El algoritmo de división nos asegura que al dividir un número entero por 15 se obtiene un resto que es un número entero entre 0 y 14. Si dos números tienen el mismo resto al ser divididos por 15 su diferencia es múltiplo de 15 (probarlo); y si la suma de los restos que se obtienen al dividir dos números por 15 es igual a 15, entonces la suma de dichos números es múltiplo de 15 (probarlo). Supongamos que se tienen 8 cajas etiquetadas de esta manera: la primera caja le asigno la etiqueta 0, a la segunda caja le asigno dos valores 1 y 14, a la tercera le asigno 2 y 13, a la caja $i$ le asigno $i-1$ y $16-i$ para $i=1,2,3,4,5,6,7,8$, es decir a las cajas les asigno valores entre 0 y 14 de tal manera que la suma de esos valores es 0 o 15. Tomemos un conjunto de 9 números enteros, al dividirlos por 15 se obtiene un resto ente 0 y 14; colocamos el número en la caja $i$ si su resto es $i$. Puesto que hay 8 cajas y 9 números, por el principio de las casillas, existe una caja con al menos dos números. Luego estos números tienen el mismo resto o la suma de sus restos es 15, en consecuencia su diferencia o su suma es múltiplo de 15.

6. Determine el número de 10-combinaciones del multiconjunto $\{4\cdot a, 3\cdot b, 5\cdot c\}$.
**Solución. Primera Solución.**
Sea $B$ las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1+x_2+x_3=10 \qquad (1)$$

con las condiciones $x_1\leq 4,\ x_2\leq 3,\ x_3\leq 5$ donde $x_1,\ x_2,\ x_3$ indica el número de $a's$, $b's$ y $c's$ respectivamente que aparecen en las 10-combinaciones. Procedemos a contar las soluciones complementarias. Definimos los conjuntos
$A_1$ soluciones de (1) tal que $x_1\geq 5$.
$A_2$ soluciones de (1) tal que $x_2\geq 4$.
$A_3$ soluciones de (1) tal que $x_3\geq 6$.
Entonces $A_1\cup A_2\cup A_3$ es el complemento de $B$.

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$A_1$ son las soluciones de la ecuación $x_1+x_2+x_3=5$ y su cardinal es

$$\binom{7}{5}=21$$

$A_2$ son las soluciones de $x_1+x_2+x_3=6$ y su cardinal es

$$\binom{8}{6}=28$$

$A_3$ son las soluciones de $x_1+x_2+x_3=4$ y su cardinal es

$$\binom{6}{4}=15$$

$A_1\cap A_2$ son las soluciones de $x_1+x_2+x_3=1$ y su cardinal es 3.
$A_1\cap A_3$ es vacío pues $x_1+x_3\geq 11$.
$A_2\cap A_3$ son las soluciones de $x_1+x_2+x_3=0$ y su cardinal es 1.
$A_1\cap A_2\cap A_3$ es vacío.

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=21+28+15-3-1=60$$

Puesto que el número de soluciones enteras no negativas de (1) sin restricciones es $\binom{12}{10}$ se tiene que

$$|B| = \binom{12}{10} - 60 = 66 - 60 = 6$$

**Segunda Solución** Se puede tener una verificación directa por ser los valores pequeños. Basta con observar que a cada 10-combinación le corresponde una 2-combinación (su complemento en relación al multiconjunto $\{4 \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c\}$). Las dos combinaciones se pueden determinar directamente:

$$\{2 \cdot a\}, \{2 \cdot b\}, \{2 \cdot c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

Lo importante es notar que hay una biyección entre las 10-combinaciones y las 2-combinaciones. De este modo hay 6 10-combinaciones.

7. Muestre que en cualquier grupo de personas hay dos que tienen el mismo número de conocidos.
**Solución.** Supongamos que el grupo es de $n$ personas, el máximo de conocidos de cada persona es $n-1$ (conoce a todas las personas del grupo); y el mínimo de personas conocidas es 0. Partimos de que el conocimiento es simétrico, es decir, si $X$ conoce a $Y$ entonces $Y$ conoce a $X$. Dispongamos de $n-1$ cajas y coloquemos la identificación de la persona $Z$ en la caja $i$ si ella conoce a $i$ personas del grupo. No es posible que las cajas 0 y $n-1$ tengan identificaciones simultáneamente, puesto que si una persona $X$ conoce a todas las del grupo no existe una persona que no conozca a ninguna (ésta debe conocer al menos a $X$). Es decir de las $n$ cajas, pueden ocuparse a los sumo $n-1$ cajas con las identificaciones; como hay $n$ personas y la identificación de cada persona se encuentra en exactamente una caja, se deduce del principio de las casillas, que hay al menos una caja que contiene al menos dos identificaciones; es decir, hay al menos dos personas que tiene el mismo número de conocidos.

8. En una parada del metro se suben 7 personas a un vagón y hay tres estaciones en las cuales se detiene ¿De cuantas maneras se pueden bajar todos los pasajeros en las tres estaciones si al menos se baja una persona en cada estación?
**Solución. Primera Solución.** El número total de maneras de bajarse las 7 personas en las tres estaciones es $3^7$, que es el número de funciones de [7] en [3]. Cada función corresponde a una manera de bajarse y recíprocamente cada manera de bajarse le corresponde una función de [7] en [3]. Para eso suponga que hemos etiquetado las personas con las etiquetas $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (recuerde que las personas son distinguibles). Si la persona $i$ se baja en la estación $j$ la función asigna a $i$ el valor $j$ y así sucesivamente.
El número de maneras de bajarse con la condición de que en cada estación se baje al menos una persona es igual al número de funciones de [7] en [3] sobreyectivas. Procedemos a contar las funciones que *no* son sobreyectivas, es decir contamos las maneras de bajarse tal que existe por lo menos una estación en la cual no se bajo nadie. Definimos los conjuntos

$A_i$ maneras de bajarse tal que nadie se bajo en la estación $i$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ son las maneras de bajarse tal que existe al menos una estación en la cual nadie se baja. Usando el principio de inclusión-exclusión

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Ahora $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^7$ que es igual al número de funciones de [7] en [2]. del mismo modo se tiene que $|A_i \cap A_j| = 1$ para $i \neq j$ pues esto indica que nadie se baja en dos de las estaciones, por lo tanto *todos* se bajan en una estación y $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es vacío. Por lo tanto

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 2^7 - 3 = 381$$

Así el número de maneras de bajarse cumpliendo la condición de que al menos se baje un pasajero en cada estación es

$$3^7 - 381 = 1806$$

**Segunda Solución.** Procedemos por etapas: en la primera etapa determinamos el número de pasajeros que han de bajarse en cada estación para que se cumpla la condición, y en la segunda etapa determinamos el número de maneras de distribuir las personas para cada uno de los casos dados en la primera etapa.

Puesto que ha de bajarse al menos una pasajero en cada estación buscamos las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

donde $x_i$ es el número de pasajeros que se baja en la estación $i$. A continuación damos la lista de todas las soluciones cuyo número es $\binom{6}{4} = 15$.

Hay tres del tipo $(1, 3, 3)$ que son $(1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1)$ y para cada uno de estos casos (segunda etapa) hay $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 140$ maneras de distribuir los pasajeros. En total $3 \cdot 140 = 420$.

Hay 6 tipos de $(1, 2, 4)$ que es la permutación y el número de maneras para distribuir lo pasajeros en cada uno de estos casos es: $\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = 105$. En total $6 \cdot 105 = 630$.

Hay tres tipos $(1, 1, 5)$ y el número de maneras de distribuir los pasajeros en cada uno de estos tipos es: $\binom{7}{5} \cdot \binom{2}{1} = 42$. En total $3 \cdot 42 = 126$.

Hay tres tipos $(2, 2, 3)$ y el número de distribuciones es $\binom{7}{3}\binom{4}{2} = 210$. En total $3 \cdot 210 = 630$.

Hemos agotado todos los casos posibles. El número de maneras total es

$$420 + 630 + 126 + 630 = 1806$$