MATHpines	MATEMÁTICAS II (CNS y Tecnológico)
	SELECTIVIDAD junio 2005 **Metodología de RESOLUCIÓN**
Prof. M.Díaz-Pinés	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**

OPCIÓN B

2. (2 puntos) . Hallar una matriz X tal que :

$$A^{(-1)}\, X\, A = B$$

siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Desarrollo metodológico

I . Localización del problema

Álgebra Lineal
Matrices
Multiplicación
Matriz inversa

II. Datos y cuestiones

d) Datos
d1. Nos dan dos matrices cuadradas de orden 2
d2. Nos dan una ecuación matricial en la matriz incógnita X

c) Cuestiones
c1. Calcular la matriz X que cumpla esa ecuación

III. Análisis del problema
a1) Se trata de obtener una matriz X cuya transformada por la matriz de paso A sea la matriz B

IV. Planteamiento
Método 1º)
p1) Hallamos $A^{(-1)}$
p2) Calculamos $A\, B\, A^{(-1)}$

Método 2º)

p1) Hacemos $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

p2) Realizamos $A^{(-1)}\, X\, A$

p3) Identificamos ese producto con B

<u>Resolución</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 1º)
Cálculo de $A^{(-1)}$

Podemos aplicar directamente :

$$M = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \;\; => \;\; M^{(-1)} = \frac{\begin{bmatrix} q & -n \\ -p & m \end{bmatrix}}{\operatorname{Det}(M)} \;\; = \;\; \frac{\begin{bmatrix} q & -n \\ -p & m \end{bmatrix}}{m\,q - p\,n}$$

$$\operatorname{Det}(A) = -1$$

A efectos de cálculo ponemos $A^{(-1)} = \operatorname{inv}(A)$

$$\operatorname{inv}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A\,B\,\operatorname{inv}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Método 2º)
Puede constituir una comprobación del resultado anterior :

Partimos de la matriz incógnita X , dada así :

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Realizamos el producto $A^{(-1)}\,X\,A$

$$\operatorname{inv}(A)\,X\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,a + 3\,c - 2\,b - 2\,d & a + c - b - d \\ -6\,a - 9\,c + 4\,b + 6\,d & -2\,a - 3\,c + 2\,b + 3\,d \end{bmatrix}$$

Identificamos la matriz obtenida con

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y obtenemos 4 ecuaciones lineales en a, b, c y d

$$ec1 := 3\,a + 3\,c - 2\,b - 2\,d = 1$$

$$ec2 := a + c - b - d = -1$$

$$ec3 := -6\,a - 9\,c + 4\,b + 6\,d = 2$$

$$ec4 := -2\,a - 3\,c + 2\,b + 3\,d = 1$$

Tenemos el sistema :

$$S := [3\,a + 3\,c - 2\,b - 2\,d = 1,\ a + c - b - d = -1,\ -6\,a - 9\,c + 4\,b + 6\,d = 2,\ -2\,a - 3\,c + 2\,b + 3\,d = 1]$$

Resolución matricial del sistema S

$$H1=\begin{bmatrix}3&-2&3&-2&1\\1&-1&1&-1&-1\\-6&4&-9&6&2\\-2&2&-3&3&1\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}3&-2&3&-2\\1&-1&1&-1\\-6&4&-9&6\\-2&2&-3&3\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss a la matriz ampliada $H1$

$$\mathrm{G}(H1)=\begin{bmatrix}3&-2&3&-2&1\\0&1&0&1&4\\0&0&-3&2&4\\0&0&0&1&-7\end{bmatrix}$$

$$d=-7\ ,\ \ c=\frac{4-2\,d}{-3}\text{ , etc}$$

$$d=-7$$

$$c=-6$$

Etcétera.

Si seguimos aplicando Jordan

$$\mathrm{GJ}(H1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&9\\0&1&0&0&11\\0&0&1&0&-6\\0&0&0&1&-7\end{bmatrix}$$

$$a=9,\ b=11,\ c=-6,\ d=-7$$

$$X=\begin{bmatrix}9&11\\-6&-7\end{bmatrix}$$

c.q.c.

Solución : $X=\begin{bmatrix}9&11\\-6&-7\end{bmatrix}$