INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

ÁLGEBRA LINEAL. APUNTES

PROBLEMA DEL CAMBIO DE BASE EN UN ENDOMORFISMO:

Sea la base de R^3 : $\beta = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$

y la aplicación lineal $f : R^3 \dashrightarrow R^3$ definida según:

$$f(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3) = (y+z)\,\mathbf{e}_1 + (x+z)\,\mathbf{e}_2 + (y-x)\,\mathbf{e}_3$$

Apartado 1. Expresión analítica de f respecto de β.

Puesto que para todo $\mathbf{u}$ de R^3 tanto él como su imagen están definidos en β, se tiene:

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, y - x)$$

y con su matriz coordenada (operador asociado):

$$\text{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ y-x \end{pmatrix}$$

Apartado 2. Vectores invariantes de f.

$\mathbf{u}$ es invariante de f si se verifica: $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ o lo que es igual: A $\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= x \\ x+z &= y \\ y-x &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y-z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Sistema homogéneo} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= y \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Conjunto de vectores invariantes = $\{ \mathbf{u} \in \mathrm{R}^3 \,;\, \mathbf{u} = (x, x, 0) \}$
Subespacio de dimensión 1 y base $\{ (1, 1, 0) \}$

Apartado 3. Núcleo e Imagen de f.

* $Ker(f)$. $\mathbf{u}$ pertenece al núcleo si se verifica: $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ o lo que es igual: A $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} y+z &= 0 \\ x+z &= 0 \\ y-x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = -z$$

$Ker(f) = \{ \mathbf{u} \in \mathrm{R}^3 \,;\, \mathbf{u} = (x, x, -x) \}$
Subespacio de dimensión 1 y base $\{ (1, 1, -1) \}$
(f no inyectiva por ser dim $Ker(f) \neq 0$)

* *Im* (*f*). Sabemos que:

$$\dim R^n = \dim Im\,(f) + \dim Ker\,(f) \quad \text{y} \quad \mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, A = \dim Im\,(f)$$

Por lo tanto, en nuestro caso: 3 = 2 + 1 => dim *Im* (*f*) = 2

Para buscar el subespacio Imagen: A **u** = **u**'

$$\left.\begin{array}{l} y+z=x' \\ x+z=y' \\ y-x=z' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'-y'=y-x \\ z'=y-x \end{array}\right\} \Rightarrow x'-y'=z'$$

Im (*f*) = { $\mathbf{u} \in \mathrm{R}^3$; $\mathbf{u} = (x, y, x - y)$ }
Subespacio de dimensión 2 y base { (1, 0, 1); (0, 1, -1) }
(*f* no sobreyectiva por ser dim *Im* (*f*) $\neq n$)

Apartado 4. Ampliamos la base del Núcleo a una base de R^3.

Basta añadir dos vectores que sean linealmente independientes entre sí y con el primero. Un modo rápido de hacerlo es elegirlos de manera que los tres formen una matriz triangular. Por ejemplo:

β' = { (1, 1, -1); (0, 1, -1); (0, 0, -1) }

Apartado 5. Cambio a la base β' del endomorfismo *f* y de su matriz asociada.

a) Calculamos las imágenes de los vectores de β' :

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, y - x)$$

$$f(1, 1, -1) = (0, 0, 0); \quad f(0, 1, -1) = (0, -1, 1); \quad f(0, 0, -1) = (-1, -1, 0)$$

b) Expresamos estos vectores en coordenadas de β' :

$$\begin{array}{l} (0,0,0) = a\,(1,1,-1) + b\,(0,1,-1) + c\,(0,0,-1) \Rightarrow (0,0,0) \\ (0,-1,1) = a\,(1,1,-1) + b\,(0,1,-1) + c\,(0,0,-1) \Rightarrow (0,-1,0) \\ (-1,-1,0) = a\,(1,1,-1) + b\,(0,1,-1) + c\,(0,0,-1) \Rightarrow (-1,0,1) \end{array}$$

c) Nueva matriz coordenada y expresión analítica para vectores expresados en β':

$$A'\,\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z' \\ -y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$f^*(x', y', z') = (-z', -y', z')$$

d) Ejemplo de la invariabilidad de la aplicación ante el cambio de base.

* En β': **u**' = (1, 2, 3) => **v**' = f* (**u**') = A' **u**' = (-3, -2, 3)

* Cambio a β: **u** = 1 (1, 1, -1) + 2 (0, 1, -1) + 3 (0, 0, -1) = (1, 3, -6)

v = -3 (1, 1, -1) - 2 (0, 1, -1) + 3 (0, 0, -1) = (-3, -5, 2)

* En β: **u** = (1, 3, -6) => **v** = f(**u**) = A **u** = (-3, -5, 2)

APUNTES: Forma matricial de realizar el cambio de base.

* Se tiene la base $\beta = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$ y en ella la aplicación f y su matriz coordenada A:

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, y - x)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

* Se quiere transformar la aplicación al nuevo sistema:

$$\beta' = \{ (1, 1, -1); (0, 1, -1); (0, 0, -1) \}$$

donde se ha de cumplir:

$$\mathrm{A}'\,\mathbf{u}' = \mathbf{v}'$$

siendo A' el transformado de A, y **u**', **v**' los respectivos transformados de **u**, **v**.

a) Construimos la matriz B del cambio de base (Aquella cuyas columnas son los vectores de la nueva base β', expresados en coordenadas de la base antigua β):

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Entonces, puesto que $\mathbf{u}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{u}$, y $\mathbf{v}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{v}$ resulta:

$$\mathrm{A}'\,\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \quad => \quad \mathrm{A}'\,\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{u} = \mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{v} \quad => \quad \mathrm{B}\,\mathrm{A}'\,\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Pero, ya vimos que A **u** = **v**, por lo cual:

$$\mathrm{B}\,\mathrm{A}'\,\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{A} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}'\,\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}' = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{B} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto: $f^*(x', y', z') = (-z', -y', z')$

c) Ejemplo de la invariabilidad de la aplicación ante el cambio de base.

* En β (Base antigua): $\mathbf{u} = (1, 3, -6) \Rightarrow \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u} = (-3, -5, 2)$

* Cambio a β' : $\mathbf{u}' = B^{-1}\,\mathbf{u} = (1, 2, 3)$

$\mathbf{v}' = B^{-1}\,\mathbf{v} = (-3, -2, 3)$

$A' = B^{-1}\,A\,B$

* En β' : $\mathbf{u}' = (1, 2, 3) \Rightarrow \mathbf{v}' = f^*(\mathbf{u}') = A'\,\mathbf{u}' = (-3, -2, 3)$

PROBLEMA DE LA DIAGONALIZACION DE UN ENDOMORFISMO.

(Ejes propios: Diagonalización canónica en el campo Real).

Dada una base β y en ella definido el operador A correspondiente a un cierto endomorfismo $f: R^n \dashrightarrow R^n$, se quiere encontrar, si existe, aquel cambio de base B para el cual el operador A' transformado de A adquiere la forma diagonal (D = A').

* *Solución:*

Si existe tal base $\{\mathbf{u}_i\}$, expresada en el sistema actual β, es evidente que dicha base, al expresarla en su propia referencia será la canónica $\{\mathbf{u}'_i\}$. Por tanto, en este nuevo sistema $\beta' = \{\mathbf{u}_i\}$, donde D ha de ser diagonal, para los transformados de estos n vectores se tiene:

$$D\,\mathbf{u}' = \lambda\,\mathbf{u}'$$

siendo λ un escalar. Aplicando ahora el cambio de base B desconocido por el momento:

$$(B^{-1}\,A\,B)\,(B^{-1}\,\mathbf{u}) = \lambda\,(B^{-1}\,\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad B^{-1}\,A\,\mathbf{u} = B^{-1}\,\lambda\,\mathbf{u}$$

Y por tanto:

$$A\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \textit{Ecuación característica.}$$

Los vectores $\mathbf{u}$, caso de existir, se llaman *vectores propios o autovectores del operador*, y los correspondientes escalares λ, *valores propios o autovalores del operador*.

Para resolver la ecuación característica se comienza por determinar los autovalores en la forma:

$$(A - \lambda\,I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad |\,A - \lambda\,I\,| = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Polinomio característico.}$$

Las raíces del polinomio característico son los autovalores, y éstos, en caso de ser reales y sustituidos en la ecuación característica, proporcionan los correspondientes vectores propios. La matriz B del cambio de base buscado es aquella cuyas columnas son los autovectores encontrados. (*Nota:* Todo A simétrico tiene autovalores reales).

EJEMPLO.

Sea la base { $\mathbf{e}_i$ } de R^3 y en ella el operador A correspondiente al endomorfismo *f*:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizarlo mediante el cambio de base a sus ejes propios.

* *Solución:*

a) <u>Ecuación característica:</u>

$$(A - \lambda\, I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) <u>Polinomio característico:</u>

$$\left|A - \lambda\, I\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nota: Cuando $n = 3$: $\quad \left|A - \lambda\, I\right| = \lambda^3 - \lambda^2 \sum_1^3 a_{ii} + \lambda \sum_1^3 A_{ii} - \left|A\right|$

En nuestro caso:

$$|\, A - \lambda\, I \,| = \lambda^3 - \lambda^2\,(-1 + 2 - 1) + \lambda\,(\,-2 - 0 + 1 - 9 - 2 - 0) - (2 + 0 + 0 - 18 - 0 - 0) = 0$$

$$|\, A - \lambda\, I \,| = \lambda^3 - 12\,\lambda + 16 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \qquad \lambda_3 = -4$$

c) Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. (<u>Raíz doble => Genera un subespacio de dimensión 2 cuando el operador es diagonalizable</u>):

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad 3x + 3z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = -z \\ y : cualquiera \end{cases}$$

$\mathbf{u} = (x, y, -x) \quad => \quad \mathbf{u}_1 = (1, 0, -1); \quad \mathbf{u}_2 = (1, 1, -1)$

d) Para $\lambda_3 = -4$. (<u>Raíz simple => Genera un subespacio de dimensión 1</u>):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = z \\ x = -y \end{cases}$$

$\mathbf{u} = (x, -x, x) \quad => \quad \mathbf{u}_3 = (1, -1, 1)$

e) Matriz B del cambio de base a los vectores propios de A:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

f) Operador diagonal D (Operador A expresado en la nueva base):

$$\mathrm{D} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nota: Se obtiene la matriz diagonal formada por los autovalores de A en el orden correspondiente a como se han colocado los autovectores en la matriz B.

Nota: Los coeficientes del polinomio característico son parámetros *invariantes del operador* ante la transformación ya que conservan sus valores pese al cambio de base:

$$\sum_1^3 a_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (\textit{Norma o traza})$$

$$\sum_1^3 A_{ii} = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 \quad (\textit{Suma de adjuntos diagonal principal})$$

$$|\mathrm{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (\textit{Determinante})$$

g) Comprobación práctica de la permanencia de la acción del operador:

* En la base antigua { $\mathbf{e}_i$ }: $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ => $\mathbf{v} = \mathrm{A}\,\mathbf{w} = (-4, 8, -4)$

* Cambio al sistema de autovectores: $\mathbf{w}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{w} = (-2, 2, 1)$

$\mathbf{v}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{v} = (-4, 4, -4)$

$\mathrm{D} = \mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}$

* En la nueva base { $\mathbf{u}_i$ } : $\mathbf{w}' = (-2, 2, 1)$ => $\mathbf{v}' = \mathrm{D}\,\mathbf{w}' = (-4, 4, -4)$

h) En lo relativo a la expresión de la aplicación:

* En la base antigua:

$$f(x, y, z) = (-x - 3z,\ 3x + 2y + 3z,\ -3x - z)$$

* En la nueva base:

$$f^*(x', y', z') = (2x',\ 2y',\ -4z')$$
